

---

# Spieltheoretische Betrachtungen von Abschreckung

---

**Game-theoretic Approaches to Deterrence**

Diplomarbeit von Robin Hesse

Juni 2014



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik  
Arbeitsgruppe Logik

Spieltheoretische Betrachtungen von Abschreckung  
Game-theoretic Approaches to Deterrence

Vorgelegte Diplomarbeit von Robin Hesse

1. Gutachten:

2. Gutachten:

Tag der Einreichung:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Das generische 2x2 Spiel</b>	<b>7</b>
2.1	Nash-Equilibrien . . . . .	7
2.2	Gemischte Nash-Equilibrien . . . . .	8
2.3	Trembling-Hand-Equilibrien . . . . .	11
2.4	Graphendarstellung und Notation . . . . .	11
2.5	Das Gleichgültigkeitsspiel . . . . .	14
2.6	Das Absicherungsspiel . . . . .	15
2.6.1	Vertauschen der Strategien beider Spieler . . . . .	15
2.6.2	Vertauschen der Strategien eines Spielers . . . . .	16
2.7	Kooperationsspiel . . . . .	17
2.7.1	Vertauschen der Strategien beider Spieler . . . . .	18
2.8	Verallgemeinertes Feiglingsspiel . . . . .	19
2.8.1	Vertauschen der Strategien eines Spielers . . . . .	19
2.9	Verallgemeinertes Gefangenendilemma . . . . .	20
2.9.1	Vertauschen der Strategien beider Spieler . . . . .	21
2.10	Spiel der Gegensätze . . . . .	22
2.11	Degenerierte Spiele . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Auszahlungsmengen für 2 Spieler</b>	<b>26</b>
3.1	Notationen . . . . .	26
3.2	Equilibriumsbedingungen für 2-Spieler-Spiele . . . . .	27
3.3	Konvexkombinationen von Nash-Equilibrien . . . . .	29
3.4	Struktur der Auszahlungsmengen . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Auszahlungsmengen für 3 Spieler</b>	<b>35</b>
4.1	Notationen . . . . .	35
4.2	Konstruktion erwarteter Auszahlungen . . . . .	35
4.3	Konstruktion notwendiger Bedingungen . . . . .	37
4.4	Beweis von Satz 4.1 . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>45</b>
<b>6</b>	<b>Erklärung zur Diplomarbeit</b>	<b>46</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	Das generische 2x2 Spiel . . . . .	7
2	Beispiel eines 2x2-Spiels . . . . .	12
3	Graph des Beispiels aus Abb.2 . . . . .	12
4	Beispiel des Gleichgültigkeitsspiels . . . . .	14
5	Graph des Gleichgültigkeitsspiels . . . . .	14
6	Beispiel des Absicherungsspiels . . . . .	15
7	Graph des Absicherungsspiels . . . . .	15
8	Beispiel des Kooperationsspiels . . . . .	17
9	Graph des Kooperationsspiels . . . . .	17
10	Beispiel des Verallgemeinerten Feiglingsspiels . . . . .	19
11	Graph des Verallgemeinerten Feiglingsspiels . . . . .	19
12	Beispiel des Verallgemeinerten Gefangenendilemmas . . . . .	20
13	Graph des Verallgemeinerten Gefangenendilemmas . . . . .	21
14	Beispiel des Spiels der Gegensätze . . . . .	22
15	Graph des Spiels der Gegensätze . . . . .	23
16	Überführbarkeitsgraph des generischen 2x2 Spiels . . . . .	25

## Tabellenverzeichnis

1	Konfiguraionen des Absicherungsspiels . . . . .	17
2	Konfigurationen des Kooperationsspiels . . . . .	18
3	Konfigurationen des Verallgemeinerten Feiglingsspiels . . . . .	20
4	Konfigurationen des Verallgemeinerten Gefangenendilemmas . . .	22

# 1 Einleitung

In der internationalen Politik wie auch in menschlichen Interaktionen im Allgemeinen ist die gegenseitige Ausübung von Einfluss allgegenwärtig. Neben der positiven Beeinflussung durch Versprechungen kommen dabei auch häufig Drohungen zum Einsatz. Von Abschreckung spricht man, wenn eine Drohung den Zweck verfolgt, das entsprechende Ziel von einer bestimmten Handlung oder Vorgehensweise abzuhalten. Ob und wann Abschreckung die gewünschte Wirkung zeigt, lässt sich auch mathematisch mit Hilfe spieltheoretischer Methoden darstellen und untersuchen. Für spieltheoretische Betrachtungen von Entscheidungs- und Konfliktsituationen es zunächst keine Rolle, ob es sich bei den betrachteten Szenarien tatsächlich um Konflikte im engeren Sinne handelt oder nur um die Interaktion egoistischer Akteure. Auch die Spieler müssen nicht unbedingt menschlichen Personen entsprechen, sogar die Betrachtung von Genen oder erlernten Verhaltensweisen ist möglich, wie vielfältige Anwendungen in der Evolutionsbiologie zeigen (Weibull, 1997). Bei der Behandlung von Abschreckungsszenarien sind die Akteure in der Regel Staaten oder einzelne Personen bzw. Personengruppen. Die für die mathematische Bearbeitung typischerweise vorausgesetzte Rationalität der Akteure bleibt damit ein zu diskutierender Punkt, welcher hier jedoch nicht genauer hinterfragt werden soll. Ein weiteres Problem bei der Modellierung ist die (teilweise stark) vereinfachte Darstellung einer zumeist komplexen Situation, wodurch viele Möglichkeiten für die Wahl eines Modells bestehen und die Ergebnisse je nach Modell und Anfangsbedingungen stark voneinander abweichen können. Hierdurch kann leicht der Vorwurf entstehen, dass die Ergebnisse und Zusammenhänge nur aufgrund der Modellwahl bzw. der Randbedingungen zustande kommen und ein Zurechtbiegen derselbigen möglich ist. Dem könnte durch eine allgemeinere Betrachtung der Modelle und Randbedingungen und eine mögliche Klassifikation derselben entgegengewirkt werden. Die nachfolgende Arbeit soll dazu einen ersten Beitrag leisten, wobei der Fokus auf den dafür benötigten mathematischen Zusammenhängen liegt.

Dazu wird zunächst das generische  $2 \times 2$  Spiel bezüglich verschiedener Eigenschaften untersucht und klassifiziert. Für die nachfolgende Verallgemeinerung dieser Klassifikation erfolgt eine genauere Betrachtung der Auszahlungsmengen auf Equilibrien und deren Zerlegung in die einzelnen Trägermengen für Spiele mit zwei Spielern. Es wird gezeigt, dass diese die Form eines kartesischen Produkts zweier Intervalle haben und die Auszahlung von höchstens einem pareto-optimalen Equilibrium enthalten. Anschließend folgt die Betrachtung der Auszahlungsmengen für drei (bzw.  $n$ ) Spieler und es wird gezeigt, dass bereits für die Trägermenge der vollständig gemischten Equilibrien die Auszahlungsmenge die Form einer beliebig komplexen algebraischen Varietät annehmen kann.

## 2 Das generische 2x2 Spiel

Das einfachste nicht-triviale Spiel, das zur Modellierung in Frage kommt, ist das generische 2x2 Spiel, in dem zwei Spieler <sup>1</sup> je zwei Strategien zur Auswahl haben. Bekannte Vertreter wie das Feiglingsspiel oder das Gefangenendilemma spielen dabei eine besondere Rolle und werden auch in nachfolgender Klassifikation berücksichtigt und teilweise noch weiter differenziert. Die betrachteten Spiele können tabellarisch dargestellt werden als

	1	2
1	$(a_{11}, b_{11})$	$(a_{12}, b_{12})$
2	$(a_{21}, b_{21})$	$(a_{22}, b_{22})$

Abbildung 1: Das generische 2x2 Spiel

wobei  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$  die Auszahlungen von Spieler  $A$  bzw.  $B$  sind, wenn Spieler  $A$  Strategie  $i$  und Spieler  $B$  Strategie  $j$  wählt.

Die somit umfassten Spiele können auf nachfolgende Eigenschaften untersucht werden.

### 2.1 Nash-Equilibrien

Das Nash-Equilibrium von Nash (1950) als elementares Lösungskonzept der Spieltheorie beschreibt eine stabile Strategiewahl der Spieler in dem Sinne, dass kein Spieler einseitig seine Strategie wechseln möchte.

**Definition 2.1** *Ein Tupel von Strategien, eine für jeden Spieler, ist genau dann ein (reines) Nash-Equilibrium, wenn kein Spieler durch einseitiges Wechseln seiner Strategie eine bessere Auszahlung erreichen kann.*

Für 2 Spieler mit je 2 Strategien ist dies für ein Strategietupel  $(i, k)$  genau dann der Fall, wenn für alle  $j, l \in \{1; 2\}$  gilt:

$$a_{ik} \geq a_{jk} \wedge b_{ik} \geq b_{il}$$

Die Nash-Equilibrien werden die Grundlage der nachfolgenden Klassifikation bilden. Da aber nicht nur ihre Anzahl, sondern auch ihre Verteilung von Interesse ist, wird folgender Begriff verwendet:

**Definition 2.2** *Zwei Strategietupel heißen benachbart genau dann, wenn sie sich nur in der Strategiewahl eines Spielers unterscheiden.*

---

<sup>1</sup>Aus Gründen der Lesbarkeit wird auf eine geschlechtsspezifische Differenzierung, wie z.B. Spieler/Innen, verzichtet. Entsprechende Begriffe gelten im Sinne der Gleichbehandlung für beide Geschlechter.

Da das Vertauschen der Spieler oder der Strategien eines Spiels zentrale Eigenschaften des Spiels nicht ändert, können solche Spiele gemeinsam betrachtet werden. Mit der Equilibriumsmenge  $E_G$  eines Spiels, die alle reinen Nash-Equilibrien enthält, kann man dazu festlegen:

**Definition 2.3** *Zwei  $n \times n$ -Spiele  $G_1, G_2$  mit Equilibriums Mengen  $E_{G_1}, E_{G_2}$  heißen strukturell-äquivalent genau dann, wenn eine Bijektion  $f : E_{G_1} \rightarrow E_{G_2}$  existiert, sodass für alle  $e, g \in E_{G_1}$   $f(e)$  und  $f(g)$  genau dann benachbart sind, wenn  $e$  und  $g$  benachbart sind.*

Offensichtlich ist über strukturelle Äquivalenz eine Äquivalenzrelation für  $n \times n$ -Spiele gegeben und die naheliegende Notation  $G_1 \sim_s G_2$  kann verwendet werden. Entsprechend werden im Folgenden strukturell-äquivalente Spiele gemeinsam betrachtet.

## 2.2 Gemischte Nash-Equilibrien

Gemischte Nash-Equilibrien erhält man, wenn in Definition 2.1 jeder Spieler nicht nur seine reinen Strategien zur Auswahl hat, sondern stattdessen eine Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge aller seiner reinen Strategien. Statt der Auszahlung betrachtet man dann den Erwartungswert der Auszahlungen bezüglich der gewählten Wahrscheinlichkeitsverteilungen aller Spieler.

**Definition 2.4** *Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Strategiemenge eines Spielers heißt gemischte Strategie.*

**Definition 2.5** *Ein Tupel gemischter Strategien, eine für jeden Spieler, heißt gemischtes Nash-Equilibrium, wenn kein Spieler durch einseitiges Wechseln seiner gemischten Strategie eine bessere erwartete Auszahlung erreichen kann.*

Beachte, dass jede reine Strategie einer gemischten Strategie entspricht, in der das gesamte Wahrscheinlichkeitsmaß auf eine Strategie konzentriert ist. Damit sind insbesondere reine Strategien auch als gemischte Strategien darstellbar. Alle gemischten Strategien, in denen das Wahrscheinlichkeitsmaß auf verschiedene Strategien verteilt ist, werden daher im Folgenden als *echt gemischte Strategien* bezeichnet und gemischte Nash-Equilibrien, in denen mindestens eine solche Strategie gespielt wird, als *echt gemischte Nash-Equilibrien*. Diese sind von besonderem Interesse, da es so innerhalb eines Spiels gewissermaßen “zufällig” zu einem Konflikt kommen kann. Wird sogar jede Strategie mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt, so spricht man von einer *vollständig gemischten Strategie* bzw. von einem *vollständig gemischten Nash-Equilibrium* (wenn jede Strategie vollständig gemischt ist). Für die Betrachtung solcher Nash-Equilibrien ist der nachfolgende Satz von großem Nutzen:

**Satz 2.6** *Für jedes endliche, gemischte Nash-Equilibrium stimmt die erwartete Auszahlung eines Spielers mit den erwarteten Auszahlungen seiner reinen Strategien, die mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt werden, überein.*



**Beweis.** Angenommen die erwarteten Auszahlungen der reinen Strategien mit positiver Wahrscheinlichkeit stimmen nicht überein. Dann ist die erwartete Auszahlung der gemischten Strategie kleiner wie die größte erwartete Auszahlung der beteiligten reinen Strategien. Somit kann der entsprechende Spieler seine Auszahlung verbessern, indem er statt seiner gemischten Strategie nur diese reine Strategie wählt, was im Widerspruch zur Equilibriumsvoraussetzung steht. Da die erwartete Auszahlung insgesamt eine Konvexkombination der Strategien mit positiver Wahrscheinlichkeit ist, muss auch diese mit den erwarteten Auszahlungen der reinen Strategien übereinstimmen.  $\square$

Für  $2 \times 2$ -Spiele kann man ein gemischtes Nash-Equilibrium als Tupel  $(p, q) \in [0, 1]^2$  darstellen, wobei  $p$  bzw.  $q$  die Wahrscheinlichkeiten für das Spielen der ersten Strategie durch Spieler  $A$  bzw. Spieler  $B$  sind. Ist  $(p, q)$  ein echt gemischtes Equilibrium, dann ist eine der beiden Wahrscheinlichkeiten nicht ganzzahlig. OBdA sei dies  $p$ . Wegen Satz 2.6 müssen dann die erwarteten Auszahlungen der beiden reinen Strategien von Spieler  $A$  übereinstimmen, d.h.

$$q \cdot a_{11} + (1 - q) \cdot a_{12} = q \cdot a_{21} + (1 - q) \cdot a_{22}$$

Dies ist genau dann der Fall wenn

$$a_{22} - a_{12} = a_{11} - a_{21} = 0 \tag{A1}$$

oder

$$a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21} \neq 0 \quad \wedge \quad q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21}} \tag{A2}$$

Im Fall (A1) liefern beide reinen Strategien die gleiche erwartete Auszahlung, egal welche Strategie von Spieler  $B$  gespielt wird. Beachte, dass der absolute Auszahlungswert weiterhin von Spieler  $B$  abhängen kann.

Ist für das betrachtete Spiel (A1) nicht erfüllt und

$$a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21} = 0$$

oder

$$\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21}} \notin [0, 1]$$

so sind die Terme  $(a_{22} - a_{12})$  und  $(a_{11} - a_{21})$  von 0 verschieden und haben unterschiedliche Vorzeichen, womit eine der beiden Strategien für Spieler  $A$  immer eine bessere Auszahlung wie die andere liefert, d.h. diese strikt dominiert. In diesem Fall gilt für alle gemischten Equilibrien entweder  $p = 1$  (wenn Strategie 2 strikt dominiert wird) oder  $p = 0$  (wenn Strategie 1 strikt dominiert wird).

Analog ergibt sich für Spieler  $B$ , wenn angenommen wird, dass  $q \in (0, 1)$ , für jedes gemischte Nash-Equilibrium

$$b_{22} - b_{21} = b_{11} - b_{12} = 0 \quad (\text{B1})$$

oder

$$b_{22} - b_{21} + b_{11} - b_{12} \neq 0 \quad \wedge \quad p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{22} - b_{21} + b_{11} - b_{12}} \quad (\text{B2})$$

Beachte, dass für ein gegebenes gemischtes Nash-Equilibrium über die Produkte der einzelnen Wahrscheinlichkeiten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der möglichen Ergebnisse induziert wird. Ob für ein gegebenes Ergebnis  $(i, k)$  ein echt gemischtes Nash-Equilibrium existiert, sodass es in der induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung eine positive Wahrscheinlichkeit erhält, lässt sich mit den obigen Überlegungen leicht feststellen. Dazu kann man zwei Fälle unterscheiden: Entweder es existiert ein vollständig gemischtes Equilibrium, d.h. die obigen Bedingungen sind für beide Spieler erfüllt, oder es gibt ein Nash-Equilibrium, in dem einer der Spieler (im Folgenden  $B$ ) eine gemischte Strategie spielt und der andere Spieler (im Folgenden  $A$ ) die zum Ergebnis passende Strategie (hier: Strategie  $i$ ). Damit ein solches Nash-Equilibrium existiert, muss (wenn wie oben  $j$  bzw.  $l$  die beiden verbleibenden Strategien der Spieler sind) nach Satz 2.6  $b_{ik} = b_{il}$  sein. Für Spieler  $A$  muss die erwartete Auszahlung von  $i$  mindestens so gut sein, wie von  $j$ , d.h. für ein passendes  $q \in (0, 1)$  muss gelten:

$$q \cdot a_{ik} + (1 - q) \cdot a_{il} \geq q \cdot a_{jk} + (1 - q) \cdot a_{jl} \quad (*)$$

Ein solches  $q$  existiert nur dann nicht, wenn

$$(a_{ik} \leq a_{jk} \quad \wedge \quad a_{il} < a_{jl}) \quad \vee \quad (a_{ik} < a_{jk} \quad \wedge \quad a_{il} \leq a_{jl}) \quad (\text{B3})$$

denn selbst wenn

$$\begin{aligned} a_{ik} &> a_{jk} \\ a_{il} &< a_{jl} \end{aligned}$$

muss  $q \in (0, 1)$  nur groß genug (oder im umgekehrten Fall klein genug) gewählt werden, damit

$$q \cdot (a_{ik} - a_{jk}) \geq (1 - q) \cdot (a_{jl} - a_{il})$$

was äquivalent zu (\*) ist.

### 2.3 Trembling-Hand-Equilibrien

Ein Trembling-Hand-Equilibrium (oder auch trembling-hand-perfektes Nash-Equilibrium) ist eine von Selten (1975) entwickelte Verfeinerung des Nash-Equilibriums, welche zusätzlich eine Stabilität bezüglich kleiner Abweichung in den gemischten Strategien der Spieler fordert. Eine Abweichung dieser Art kann als Fehler des Spielers (beispielsweise durch beschränkte Rationalität) in der Strategiewahl interpretiert werden und ist damit bei der Betrachtung menschlicher Spieler von besonderem Interesse.

Für die hier betrachteten Spiele lässt sich diese Idee leicht über die erwarteten Auszahlungen in einfache Bedingungen überführen. Betrachte also ein reines Nash-Equilibrium  $(i, k)$  des generischen 2x2-Spiels. Damit  $(i, k)$  stabil gegenüber Abweichungen in der Strategie von Spieler  $B$  ist, muss die erwartete Auszahlung der reinen Strategie  $i$  von Spieler  $A$  für kleine Abweichungen  $\epsilon > 0$  auch dann noch mindestens so groß sein wie die von Strategie  $j$ , wenn Spieler  $B$  seine Equilibriumsstrategie  $k$  nur mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \epsilon)$  spielt. Sind  $j \neq i$  und  $l \neq k$  die beiden anderen Strategien von Spieler  $A$  bzw. Spieler  $B$ , so muss gelten:

$$(1 - \epsilon)a_{ik} + \epsilon \cdot a_{il} \geq (1 - \epsilon)a_{jk} + \epsilon \cdot a_{jl}$$

oder äquivalent dazu

$$a_{ik} - a_{jk} + \epsilon(a_{il} - a_{jl} + a_{jk} - a_{ik}) \geq 0$$

Da  $(i, k)$  ein Nash-Equilibrium ist und somit entweder  $a_{ik} - a_{jk} > 0$  oder  $a_{ik} - a_{jk} = 0$  gilt, ist obige Gleichung genau dann für hinreichend kleine Fehler  $\epsilon > 0$  erfüllt, wenn

$$a_{ik} - a_{jk} > 0 \quad \vee \quad a_{il} - a_{jl} \geq 0$$

Betrachtet man Abweichungen in der Strategie von Spieler  $A$ , so folgt analog:

$$b_{ik} - b_{il} > 0 \quad \vee \quad b_{jk} - b_{jl} \geq 0$$

### 2.4 Graphendarstellung und Notation

Mit obigen Kriterien können die 2x2-Spiele nun untersucht und entsprechend struktureller Äquivalenz zusammengefasst werden. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird jedem Fall ein repräsentatives Beispiel und ein Graph beigelegt. Innerhalb dieses Graphen wird jedes Strategietupel durch einen Knoten dargestellt und zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden, wenn (a) die zugehörigen Strategietupel benachbart sind und (b) die Präferenz des Spielers, bezüglich dessen die Kombinationen benachbart sind, zwischen beiden Ergebnissen eindeutig festgelegt ist. Je nach Art dieser Präferenz ist die Kante

entweder gerichtet (auf die präferierte Kombination) oder ungerichtet (bei Gleichwertigkeit). Der Fall, dass eine der Kombinationen nicht präferiert wird (aber nicht festgelegt ist, ob die andere präferiert wird oder keine von beiden), wird durch eine entsprechende durchgestrichene Kante im Graphen vermerkt. Die Knoten werden je nach Eigenschaften der zugehörigen Strategietupel genau einem der folgenden Typen zugeordnet:

**E**: die entsprechende Kombination ist ein Nicht-Trembling-Hand-Nash-Equilibrium

**T**: die entsprechende Kombination ist ein Trembling-Hand-Equilibrium

**(T)**: die entsprechende Kombination ist ein Nash-Equilibrium, das unter zusätzlichen Voraussetzungen ein Trembling-Hand-Equilibrium wird

**X**: die entsprechende Kombination ist kein Nash-Equilibrium

So ergibt sich zum Beispiel aus dem Spiel

	1	2
1	(2, 2)	(1, 2)
2	(2, 0)	(0, 1)

Abbildung 2: Beispiel eines 2x2-Spiels

der zugehörige Graph zu:

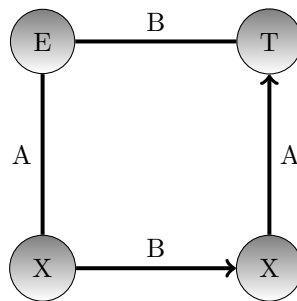


Abbildung 3: Graph des Beispiels aus Abb.2

wobei an den Kanten jeweils der Spieler vermerkt wurde, bezüglich dessen die verbundenen Strategietupel benachbart sind. Beachte, dass diese Graphendarstellung für größere Spiele ihre Übersichtlichkeit verliert, da die Anzahl der benötigten Kanten fakultativ mit der Anzahl der Strategien jedes Spielers steigt.

Die hier untersuchten Spiele können jeweils als Abschreckungsszenario interpretiert werden, wenn die Strategien mit den Möglichkeiten der Spieler sich kooperativ zu verhalten (im Folgenden Strategie 1) oder aggressiv zu verhalten (im Folgenden Strategie 2) identifiziert werden. Die vier möglichen

Ergebnisse sind dann interpretierbar als Frieden (beide Spieler kooperieren), A gewinnt bzw. B verliert (nur Spieler B kooperiert), B gewinnt bzw. A verliert (nur Spieler A kooperiert) oder offener Konflikt (kein Spieler kooperiert). Dabei muss es sich bei dem Konflikt nicht unbedingt um eine bewaffnete Konfrontation handeln, da sich das Konzept der Abschreckung auch auf andere Situationen übertragen lässt. Damit eine geplante Abschreckung die gewünschte Wirksamkeit entfalten kann, müssen wenigstens zwei Bedingungen erfüllt sein. Zunächst muss sich für den Abzuschreckenden eine Ausführung der angedrohten Maßnahmen innerhalb eines Konflikts tatsächlich hinreichend negativ auswirken. Im Folgenden wird daher die Abschreckungsmöglichkeit eines Spielers als *geeignet* bezeichnet, wenn der andere Spieler den Status quo gegenüber dem Konflikt bevorzugt. Gleichzeitig muss der abschreckende Spieler auch in der Lage sein, die Drohung in die Tat umzusetzen ohne entgegen seinen eigenen Präferenzen zu handeln, da die Drohung sonst nicht ernst genommen wird. Aus diesem Grund heißt die Abschreckungsmöglichkeit eines Spielers im Folgenden *glaubwürdig*, wenn der Spieler den Konflikt vor dem Verlieren bevorzugt. Es wird sich zeigen, dass diese Bedingungen, entgegen der naheliegenden Vermutung nicht hinreichend für eine erfolgreiche Abschreckung innerhalb des generischen 2x2-Spiels sind. Ergänzend können verschiedenen Spielertypen identifiziert werden. Ein Spieler heißt im Folgenden *konfliktbereit*, wenn er den Konflikt vor dem Verlieren bevorzugt und *konfliktmeidend*, wenn das Gegenteil der Fall ist. Diese Begriffe entsprechen im Wesentlichen den von Zagare & Kilgour verwendeten Begriffen von *capable* und *credible Threats*, sowie den Spielertypen *soft* und *hard* (Zagare & Kilgour, 2004). Ergänzend dazu wird ein Spieler als *konfliktneutral* bezeichnet, wenn er weder konfliktbereit, noch konfliktmeidend ist. Weiter heißt ein Spieler *expansiv*, wenn er Gewinnen gegenüber dem Status quo präferiert und *passiv*, im umgekehrten Fall. Trifft keines von beiden zu, wird der Spieler als *expansionsneutral* bezeichnet. Beachte, dass so jedem Spieler genau zwei der obigen Spielertypen zugeordnet werden können, aber die Präferenzen des Spielers nicht vollständig beschrieben sind, da durch die Spielertypen unter anderem die Präferenz zwischen Status quo und Konflikt nicht festgelegt ist. Für die nachfolgende Einordnung eines 2x2 Spiels bezüglich struktureller Äquivalenz wird sich allerdings zeigen, dass die Kenntnis der Spielertypen ausreichend ist.

Beachte weiter, dass in den nachfolgenden Spieleklassen ein Vertauschen der Strategien eines Spielers die Interpretation der Situation ändert, obwohl die Struktur des Spiels gleich bleibt. Einige Interpretationen können dabei auf den ersten Blick für Abschreckungsszenarien untypisch erscheinen, beispielsweise wenn ein Spieler den Status quo vor dem Gewinnen bevorzugt (d.h. passiv ist), jedoch ist eine uneingeschränkte Betrachtung aller Fälle ausdrücklich Teil der Zielsetzung. Zudem können auch solche Situationen in der Regel sinnvoll interpretiert werden. So könnte sich ein militärischer Sieg aufgrund des Verlusts von Handelspartnern oder wirtschaftlichen Sanktionen trotz möglicher Gewinne in anderen Bereichen insgesamt nachteilig auswirken und so eine Bevorzugung des Status quo rechtfertigen.

## 2.5 Das Gleichgültigkeitsspiel<sup>2</sup>

$$a_{11} = a_{21} \quad b_{21} = b_{22} \quad a_{22} = a_{12} \quad b_{12} = b_{11}$$

	1	2
1	(1, 1)	(0, 1)
2	(1, 0)	(0, 0)

Abbildung 4: Beispiel des Gleichgültigkeitsspiels

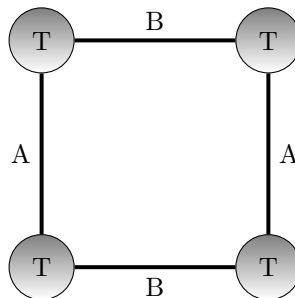


Abbildung 5: Graph des Gleichgültigkeitsspiels

In diesem Fall sind beide Spieler expansions- und konfliktneutral und somit alle Strategietupel Trembling-Hand-Equilibrien, da die Auszahlung eines Spielers nur von der gewählten Strategie des anderen Spielers abhängt. Ein Spieler kann sich nie durch einseitiges Wechseln seiner Strategie verbessern und eine mögliche Unschärfe in der Strategiewahl des Mitspielers ändert daran nichts. Ebenso ist jedes Tupel gemischter Strategien ein gemischtes Nash-Equilibrium. Entsprechend der Equilibrien und neutralen Haltung der Spieler kann jedes Ergebnis als gleichwahrscheinlich betrachtet werden. Beachte dabei, dass für die Spieler in der Regel trotzdem ein optimales Ergebnis existiert, wie das gegebene Beispiel zeigt. In diesem kann es also zum Konflikt kommen, obwohl der Status Quo von beiden Spielern bevorzugt wird. Somit schlägt bereits in dieser (wenn auch speziellen) Klasse von Spielen eine mögliche Abschreckung fehl, obwohl beide Abschreckungspotentiale in obigem Beispiel glaubwürdig und geeignet sind. Es wird sich später zeigen, dass dies noch in weiteren Klassen möglich ist.

<sup>2</sup>Hinweis: Die Benennungen der einzelnen Klassen ist frei gewählt

## 2.6 Das Absicherungsspiel

$$a_{11} = a_{21} \quad b_{21} \geq b_{22} \quad a_{22} \leq a_{12} \quad b_{12} = b_{11}$$

$$b_{21} > b_{22} \text{ oder } a_{22} < a_{12}$$

	1	2
1	(2; 2)	(1; 2)
2	(2; 1)	(0; 0)

Abbildung 6: Beispiel des Absicherungsspiels

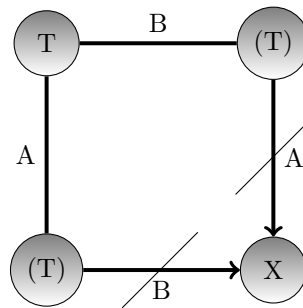


Abbildung 7: Graph des Absicherungsspiels

Das Absicherungsspiel entspricht im Wesentlichen dem Gleichgültigkeitsspiel, nur das mindestens einer der Spieler konfliktmeidend ist, d.h. Verlieren vor dem Konflikt bevorzugt. Damit ist der Konflikt als einziges Ergebnis kein Nash-Equilibrium. Der Status quo ist in jedem Fall ein Trembling-Hand-Equilibrium, die beiden Ergebnisse, bei denen ein Spieler gewinnt, nur dann wenn dieser Spieler nicht konfliktmeidend (und damit sein Bedrohungspotential glaubwürdig) ist. Das liegt daran, dass sich ein konfliktmeidender, nicht-expansiver Spieler immer durch kooperatives Verhalten gegenüber einem möglichen Konflikt absichern wird, wenn er auch nur die kleinste Möglichkeit einer Nicht-Kooperation des anderen Spielers vermutet. Für Spieler dieser Art ist die Kooperation eine *schwach dominante Strategie*, das heißt diese Strategie ist vom Ergebnis für den Spieler in manchen Fällen besser, aber nie schlechter. Daher gibt es auch kein echt gemischtes Equilibrium, das das Risiko eines zufälligen Konfliktes mit sich bringt.

### 2.6.1 Vertauschen der Strategien beider Spieler

Vertauscht man die Strategien (d.h. Strategie 1 ist aggressiv, Strategie 2 kooperativ), so entspricht das Absicherungsspiel einem Gleichgültigkeitsspiel, bei dem mindestens einer der Spieler expansiv ist. Der Status quo ist das einzige

Ergebnis, das kein Nash-Equilibrium ist. Der Konflikt ist immer ein Trembling-Hand-Equilibrium, das Verlieren eines Spielers genau dann, wenn dieser Spieler nicht expansiv ist, da er sonst nicht kooperieren wird, um die Chance auf einen Gewinn zu haben. Nicht-Kooperation ist dann schwach dominant gegenüber der Kooperation.

### 2.6.2 Vertauschen der Strategien eines Spielers

Vertauscht man die Strategien eines Spielers (im Folgenden Spieler  $A$ ), so ist  $A$  konfliktbereit oder  $B$  passiv. In jedem Fall ist "A gewinnt" immer ein Trembling-Hand-Equilibrium, das Gewinnen von Spieler  $B$  als einziges kein Nash-Equilibrium. Der Status quo ist genau dann ein Trembling-Hand-Equilibrium, wenn keiner der Spieler konfliktbereit ist und damit die Trembling-Hand-Perfektheit stört. Ist einer der Spieler passiv, ist zudem der Konflikt kein Trembling-Hand-Equilibrium. Der potentiell aggressive Spieler scheint gegenüber dem potentiell passiven Spieler durch seine Haltung einen Vorteil zu erlangen, da sein Gewinn das einzige sichere Trembling-Hand-Equilibrium darstellt und das Gewinnen des anderen Spielers nie. Beachte aber, dass ein passiver Spieler nicht auf den eigenen Gewinn abzielt, sondern stattdessen den Status quo bevorzugt. Dessen Trembling-Hand-Perfektheit ist wiederum wesentlich von der Haltung des anderen, potentiell aggressiven Spielers abhängig. Gleiches gilt für einen konfliktbereiten, nicht-expansiven Spieler, der in dieser Situation primär auf einen Konflikt ausgerichtet ist (und nicht auf das Gewinnen).

Zur besseren Übersichtlichkeit der möglichen Interpretationen einer Spieleklasse werden diese im Folgenden auch tabellarisch aufgelistet, wobei von Fällen, die durch das Vertauschen von Spielern ineinander überführbar sind, jeweils nur einer dieser Fälle aufgelistet wird. Dabei werden die Equilibrien hervorgehoben, die trembling-hand-perfekt sind, und die möglichen Ergebnisse wie folgt notiert:

**A/B:** Spieler A/B gewinnt

**SQ:** Status quo

**K:** Konflikt

Zusätzlich wird vermerkt, ob ein echt gemischtes Equilibrium existiert, das einen Konflikt als mögliches Ergebnis besitzt und damit ein "Zufallskonflikt" möglich ist.

Für das Absicherungsspiel ergibt sich:



Tabelle 1: Konfigurationen des Absicherungsspiels

Typ Spieler A	Typ Spieler B	Equilibrien	Zufallskonflikt
expansionsneutral konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktmeidend	<b>SQ</b> ,A,B	Nein
expansionsneutral konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktneutral	<b>SQ</b> ,B,A	Nein
expansiv konfliktneutral	expansiv konfliktneutral	<b>K</b> ,A,B	Ja
expansiv konfliktneutral	expansionsneutral konfliktneutral	<b>K</b> ,A,B	Ja
expansionsneutral konfliktbereit	passiv konfliktneutral	<b>A</b> ,K,SQ	Ja
expansionsneutral konfliktbereit	expansionsneutral konfliktneutral	<b>A</b> ,K,SQ	Ja
expansionsneutral konfliktneutral	passiv konfliktneutral	<b>A</b> ,SQ,K	Ja

## 2.7 Kooperationspiel

$$a_{11} \geq a_{21} \quad a_{22} < a_{12} \quad b_{12} = b_{11}$$

$$b_{21} < b_{22} \text{ oder } a_{11} > a_{21}$$

	1	2
1	(2, 2)	(1, 2)
2	(2, 0)	(0, 1)

Abbildung 8: Beispiel des Kooperationsspiels

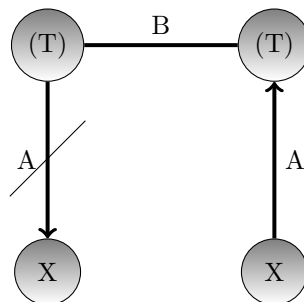


Abbildung 9: Graph des Kooperationsspiels

Im Kooperationspiel ist Spieler *A* konfliktmeidend und nicht-expansiv, Spieler *B* wiederum expansionsneutral. Darüber hinaus ist Spieler *B* konfliktbereit, wenn Spieler *A* ebenfalls expansionsneutral ist. Damit ist die Kooperation

für Spieler  $A$  in jedem Fall eine schwach dominante Strategie und der Status quo und das Gewinnen von Spieler  $B$  sind die einzigen Nash-Equilibrien. Deren Trembling-Hand-Perfektheit hängt davon ab, ob Spieler  $B$  konfliktmeidend oder konfliktbereit ist: Ist er konfliktmeidend, ist “ $B$  gewinnt” kein Trembling-Hand-Equilibrium, ist er konfliktbereit ist der Status quo nicht trembling-hand-perfekt. Wie im Absicherungsspiel genügt es auch ohne expansive Spieler, dass einer der Spieler konfliktbereit ist, um die Trembling-Hand-Perfektheit aufzuheben.

### 2.7.1 Vertauschen der Strategien beider Spieler

Vertauscht man wie oben die Strategien beider Spieler untereinander, dreht sich das Kooperationsspiel um. Spieler  $A$  ist nicht-konfliktmeidend und expansiv, Spieler  $B$  ist konfliktneutral und passiv, wenn Spieler  $A$  ebenfalls konfliktneutral ist. In der Folge ist für  $A$  Nicht-Kooperation schwach dominant und der Konflikt und “ $A$  gewinnt” die einzigen Equilibrien. Die Trembling-Hand-Perfektheit hängt von der Präferenz von  $B$  zwischen Gewinnen und Status quo ab.

Tabelle 2: Konfigurationen des Kooperationsspiels

Typ Spieler A	Typ Spieler B	Equilibrien	Zufallskonflikt
passiv konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktbereit	<b>B,SQ</b>	Nein
passiv konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktneutral	<b>B,SQ</b>	Nein
passiv konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktmeidend	<b>SQ,B</b>	Nein
expansionsneutral konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktbereit	<b>B,SQ</b>	Nein
passiv konfliktneutral	expansionsneutral konfliktmeidend	<b>SQ,B</b>	Nein
expansiv konfliktbereit	passiv konfliktneutral	<b>A,K</b>	Ja
expansiv konfliktbereit	expansionsneutral konfliktneutral	<b>A,K</b>	Ja
expansiv konfliktbereit	expansiv konfliktneutral	<b>K,A</b>	Ja
expansiv konfliktneutral	passiv konfliktneutral	<b>A,K</b>	Ja
expansionsneutral konfliktbereit	expansiv konfliktneutral	<b>K,A</b>	Ja

## 2.8 Verallgemeinertes Feiglingsspiel

$$\begin{aligned}
 a_{11} &\leq a_{21} & b_{21} &\geq b_{22} & a_{22} &\leq a_{12} & b_{12} &\geq b_{11} \\
 b_{21} &> b_{22} & \text{oder} & a_{12} &> a_{22} \\
 b_{12} &> b_{11} & \text{oder} & a_{21} &> a_{11}
 \end{aligned}$$

	1	2
1	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, 1)	(0, 0)

Abbildung 10: Beispiel des Verallgemeinerten Feiglingsspiels

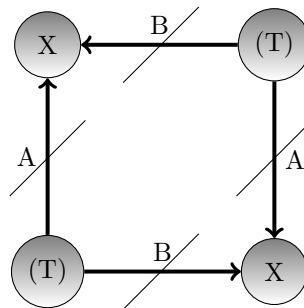


Abbildung 11: Graph des Verallgemeinerten Feiglingsspiels

Im Verallgemeinerten Feiglingsspiel ist mindestens einer der beiden Spieler konfliktmeidend und mindestens einer von beiden expansiv. Das klassische Feiglingsspiel ergibt sich, wenn für beide Spieler beides zutrifft. Damit sind insbesondere alle Spiele dieser Klasse zu diesem strukturell-äquivalent. “A gewinnt” bzw. “B gewinnt” sind hier die einzigen Equilibrien, wobei mindestens eines davon trembling-hand-perfekt ist.

### 2.8.1 Vertauschen der Strategien eines Spielers

Vertauscht man die Strategien eines Spielers, so sind entsprechend der Status quo und der Konflikt die einzigen Equilibrien, da die Spieler entweder passiv oder konfliktbereit sind. Insgesamt ergeben sich folgende Varianten:

Tabelle 3: Konfigurationen des Verallgemeinerten Feiglingsspiels

Typ Spieler A	Typ Spieler B	Equilibrien	Zufallskonflikt
expansiv konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktneutral	<b>B,A</b>	Ja
expansiv konfliktmeidend	expansiv konfliktneutral	<b>B,A</b>	Ja
expansiv konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktmeidend	<b>A,B</b>	Nein
expansiv konfliktmeidend	expansiv konfliktmeidend	<b>A,B</b>	Ja
expansiv konfliktneutral	expansionsneutral konfliktmeidend	<b>A,B</b>	Nein
passiv konfliktbereit	expansionsneutral konfliktneutral	<b>SQ,K</b>	Ja
passiv konfliktbereit	passiv konfliktneutral	<b>SQ,K</b>	Ja
passiv konfliktbereit	expansionsneutral konfliktbereit	<b>K,SQ</b>	Nein
passiv konfliktbereit	passiv konfliktbereit	<b>SQ,K</b>	Ja
passiv konfliktneutral	passiv konfliktneutral	<b>SQ,K</b>	Nein
expansionsneutral konfliktbereit	expansionsneutral konfliktbereit	<b>K,SQ</b>	Nein

## 2.9 Verallgemeinertes Gefangenendilemma

$$b_{21} \leq b_{22} \quad a_{22} > a_{12} \quad b_{12} > b_{11}$$

$$b_{21} < b_{22} \text{ oder } a_{21} < a_{11}$$

	1	2
1	(2, 2)	(0, 3)
2	(3, 0)	(1, 1)

Abbildung 12: Beispiel des Verallgemeinerten Gefangenendilemmas

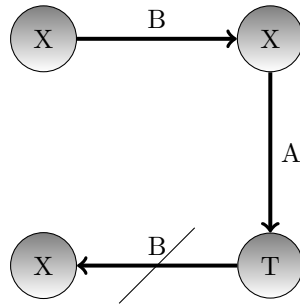


Abbildung 13: Graph des Verallgemeinerten Gefangenendilemmas

Im Verallgemeinerten Gefangenendilemma existiert genau ein Nash-Equilibrium, das in jedem Fall trembling-hand-perfekt ist. Um den Konflikt als Nash-Equilibrium zu erhalten, reicht es, dass ein Spieler expansiv und nicht-konfliktmeidend ist und der andere konfliktbereit. Die Präferenz des letzteren zwischen Status quo und Gewinnen ist irrelevant. Beachte, dass hier entsprechend des gegebenen Beispiels wieder der Fall auftreten kann, dass beide Spieler geeignete und glaubhafte Drohungspotentiale besitzen, aber trotzdem keine erfolgreiche Abschreckung gegeben ist.

### 2.9.1 Vertauschen der Strategien beider Spieler

Um den Status quo als einziges Equilibrium zu erhalten, muss Kooperation für einen Spieler schwach dominant sein und der andere Spieler passiv. Hier spielt es keine Rolle, ob Letzterer konfliktbereit, konfliktmeidend oder konfliktneutral ist.

Tabelle 4: Konfigurationen des Verallgemeinerten Gefangenendilemmas

Typ Spieler A	Typ Spieler B	Equilibrien	Zufallskonflikt
passiv konfliktbereit	expansiv konfliktbereit	<b>K</b>	Nein
expansionsneutral konfliktbereit	expansiv konfliktbereit	<b>K</b>	Nein
expansiv konfliktbereit	expansiv konfliktbereit	<b>K</b>	Nein
passiv konfliktbereit	expansiv konfliktneutral	<b>K</b>	Ja
passiv konfliktbereit	passiv konfliktmeidend	<b>SQ</b>	Nein
passiv konfliktneutral	passiv konfliktmeidend	<b>SQ</b>	Nein
passiv konfliktmeidend	passiv konfliktmeidend	<b>SQ</b>	Nein
passiv konfliktbereit	expansionsneutral konfliktmeidend	<b>SQ</b>	Nein
expansiv konfliktmeidend	expansiv konfliktbereit	<b>B</b>	Nein
expansionsneutral konfliktmeidend	expansiv konfliktbereit	<b>B</b>	Nein
passiv konfliktmeidend	expansiv konfliktbereit	<b>B</b>	Nein
expansiv konfliktmeidend	expansionsneutral konfliktbereit	<b>B</b>	Nein
expansiv konfliktneutral	passiv konfliktmeidend	<b>A</b>	Nein
expansiv konfliktmeidend	passiv konfliktmeidend	<b>A</b>	Nein
expansiv konfliktmeidend	passiv konfliktneutral	<b>A</b>	Ja

## 2.10 Spiel der Gegensätze

$$a_{11} > a_{21} \quad b_{21} > b_{22} \quad a_{22} > a_{12} \quad b_{12} > b_{11}$$

	1	2
1	(2, 1)	(0, 2)
2	(1, 1)	(1, 0)

Abbildung 14: Beispiel des Spiels der Gegensätze

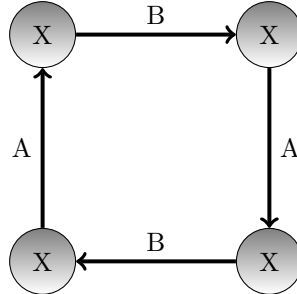


Abbildung 15: Graph des Spiels der Gegensätze

In diesem Spiel existiert gar kein Equilibrium, da die Präferenzen der Spieler genau gegensätzlich verlaufen. Einer der Spieler ist expansiv-konfliktmeidend, der andere passiv-konfliktbereit. Allerdings existiert ein vollständig gemischtes Nash-Equilibrium, d.h. es kann dennoch zum (zufälligen) Konflikt kommen.

## 2.11 Degenerierte Spiele

Die Nash-Equilibrien wurden mit Hilfe der Trembling-Hand-Bedingungen bereits auf ihre Stabilität bezüglich kleiner Abweichungen in den Strategien der Spieler untersucht. Ebenso kann auch die Stabilität der aufgeführten Spieleklassen bezüglich kleiner Abweichungen in den Auszahlungen der Spieler betrachtet werden.

**Definition 1.6** Sei  $G=(P,S,U)$  ein reellwertiges  $n \times n$ -Spiel mit Auszahlungsfunktion  $U : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $G_{s_0}^\epsilon = (P,S,U')$  mit  $\epsilon \in \mathbb{R}^2$ ,  $s_0 \in S$  und

$$U'(s) = \begin{cases} U(s) & s \in S \setminus \{s_0\} \\ U(s) + \epsilon & s = s_0 \end{cases}$$

ein pertubiertes Spiel, das durch eine Abweichung um  $\epsilon$  in der Auszahlungsfunktion entsteht. Die Stabilität  $\mathcal{S}$  von  $G$  sei

$$\mathcal{S}(G) := \text{Inf}\{|\epsilon| : \epsilon \in \mathbb{R}^2, \exists s_0 \in S \text{ mit } G_{s_0}^\epsilon \not\sim_s G\}$$

Ein Spiel  $G$  mit  $\mathcal{S}(G) = 0$  (bzw. eine Klasse von Spielen mit  $\mathcal{S}(G) = 0$ ) heißt im Folgenden auch *degeneriertes Spiel* und entspricht im Wesentlichen den von Zagare & Kilgour (2004) bei ihrer Analyse als Spezialfall ausgeklammerten Spielen. Solche Spiele sind durch infinitesimale Änderungen in der Auszahlungsfunktion in Spiele aus anderen Struktur-Äquivalenzklassen überführbar. Die sich daraus ergebende Verknüpfung der Struktur-Äquivalenzklassen untereinander können wieder anhand eines Graphen dargestellt werden. Dabei werden die einzelnen Klassen als Knoten dargestellt und eine gerichtete Kante  $(C,D)$  zwischen zwei

Knoten  $C$  und  $D$  erstellt, wenn jedes Spiel aus der zugehörigen Klasse von  $C$  durch (möglicherweise mehrere) infinitesimale Änderungen an der Auszahlungsfunktion in ein Spiel aus der zugehörigen Klasse von  $D$  überführt werden kann. Der folgende Graph wurde anschließend noch übersichtlicher gestaltet, indem jede gerichtete Kante, für die bereits ein gerichteter Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt existierte, wieder eliminiert wurde. Da insbesondere strukturell-äquivalente Spiele nicht zwangsläufig die gleiche Stabilität haben und sich schon allein dadurch die Art der möglichen Überführungen ändern kann, müssen die einzelnen Klassen noch etwas weiter wie folgt differenziert werden:

1. GS ist das Gleichgültigkeitsspiel
2. AS1 ist das Absicherungsspiel, wobei nur in einer der betrachteten Beziehungen echte Ungleichheit gilt.
3. AS2 ist das Absicherungsspiel, wobei in beiden betrachteten Beziehungen echte Ungleichheit gilt.
4. dFS3 ist das Allgemeine Feiglingsspiel, bei dem in genau einer der betrachteten Beziehungen Gleichheit gilt.
5. dFS2 ist das Allgemeine Feiglingsspiel, bei dem von jedem Spieler genau eine der betrachteten Beziehungen mit Gleichheit erfüllt ist.
6. dFS1 ist das Allgemeine Feiglingsspiel, bei dem bei einem der Spieler Gleichheit zwischen beiden betrachteten Beziehungen gilt.
7. KS1 ist das Kooperationsspiel, bei dem bei einem Spieler bei beiden betrachteten Beziehungen Gleichheit gilt.
8. KS2 ist das Kooperationsspiel, bei dem bei jedem Spieler eine der betrachteten Beziehungen mit Gleichheit gilt.
9. KS3 ist das Kooperationsspiel, bei dem nur eine der betrachteten Beziehungen mit Gleichheit erfüllt ist.
10. kFS ist das klassische Feiglingsspiel.
11. dGD1 ist das Allgemeine Gefangenendilemma, wobei keiner der Spieler eine strikt dominante Strategie besitzt.
12. dGD2 ist das Allgemeine Gefangenendilemma, wobei einer der Spieler eine strikt dominante Strategie besitzt und für den anderen Spieler eine der betrachteten Beziehungen mit Gleichheit gilt.
13. kGD ist das (nicht-degenerierte) klassische Gefangenendilemma.
14. nGD ist der zweite nicht-degenerierte Fall des Allgemeinen Gefangenendilemmas.
15. SdG ist das Spiel der Gegensätze.



Der verknüpfende Graph ergibt sich dann zu:

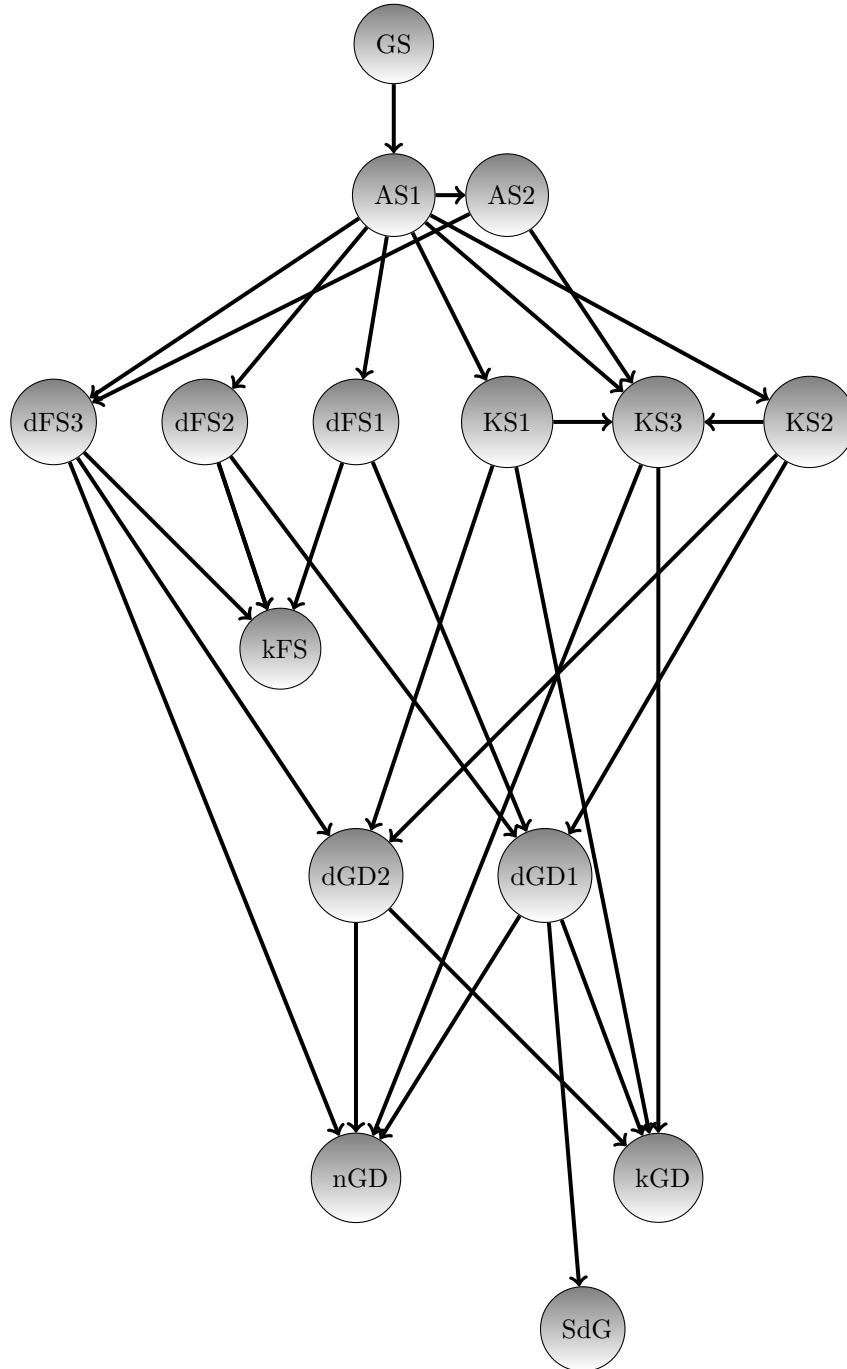


Abbildung 16: Überführbarkeitsgraph des generischen 2x2 Spiels

Anhand des Graphen lässt sich erkennen, welche Fälle ähnlich sind und welche Möglichkeiten der Bildung eines nicht-degenerierten Spiels durch Abweichungen in der Auszahlungsfunktion bestehen. Dabei ist das nicht-degenerierte Gefangenendilemma (nGD) mit allen degenerierten Fällen verknüpft und dem klassischen Gefangenendilemma (kGD) fehlt nur eine Verknüpfung zur dritten Unterklasse des Kooperationsspiels (KS3), während den beiden anderen nicht-degenerierten Fällen, das Spiel der Gegensätze (SdG) und das klassische Feiglingsspiel (kFS), jeweils ganze 5 Verknüpfungen fehlen. Werden die relevanten Präferenzen der Spieler innerhalb des generischen 2x2-Spiels zufällig ausgewählt, so ergibt sich eine ähnliche Verteilung. In der Hälfte aller nicht-degenerierten Fälle ergibt sich das nicht-degenerierte Gefangenendilemma (nGD). Das klassische Gefangenendilemma (kGD) immerhin in einem Viertel der nicht-degenerierten Fälle und sowohl das klassische Feiglingsspiel als auch das Spiel der Gegensätze ergeben sich nur in jedem achten Fall.

### 3 Auszahlungsmengen für 2 Spieler

Um den Begriff der strukturellen Äquivalenz zu erweitern und die Spiele bezüglich Präferenzordnung der Spieler für die verschiedenen Nash-Equilibrien zu unterscheiden, ist eine Betrachtung der Auszahlungen der in einem Spiel vorhandenen Nash-Equilibrien notwendig. Ist deren Anzahl endlich, so könnte die Relation der Nash-Equilibrien zueinander bezüglich der Spielerpräferenzen als endliches Tupel darstellen. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Anzahl zwar nicht endlich ist, aber die Auszahlungsmengen zumindest für 2-Spieler-Spiele eine ganz bestimmte Struktur aufweisen und immerhin die Anzahl der Auszahlungen pareto-optimaler Nash-Equilibrien durch die Anzahl der Strategien der Spieler beschränkt ist.

#### 3.1 Notationen

Ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern sei im Folgenden ein 3-Tupel  $G = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, S_A \times S_B, U)$  mit Strategieanzahlen  $n, m \in \mathbb{N}^+$ , Strategiemengen  $S_A := \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $S_B := \{1, 2, \dots, n\}$ , und einer Auszahlungsfunktion  $U : S_A \times S_B \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Die Mengen

$$M_A := \{a \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m a_i = 1 \quad a_i \in [0, 1]\}$$

$$M_B := \{b \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n b_i = 1 \quad b_i \in [0, 1]\}$$

seien die Mengen der gemischten Strategien der Spieler und der Träger einer gemischten Strategie  $a \in M_A$  sei die Menge

$$\text{supp}(a) := \{i \in \mathbb{N} : a_i > 0\}$$

aller Strategien, die innerhalb dieser Strategie mit Wahrscheinlichkeit größer 0 gewählt werden. Der Träger eines Tupels  $(a, b) \in M_A \times M_B$  gemischter Strategien sei gegeben durch die Menge

$$\text{supp}(a, b) := \text{supp}(a) \times \text{supp}(b)$$

und die Menge  $E_G$  sei die Menge aller gemischten Nash-Equilibrien von  $G$ .  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  seien die Auszahlungs-Matrizen der Spieler, d.h. wenn Spieler  $\mathcal{A}$  Strategie  $i \in S_A$  spielt und Spieler  $\mathcal{B}$  Strategie  $j \in S_B$ , erhält Spieler  $\mathcal{A}$  die Auszahlung  $A_{i,j} := U_1(i, j)$  und Spieler  $\mathcal{B}$  die Auszahlung  $B_{i,j} := U_2(i, j)$ . Für ein Tupel  $(a, b) \in M_A \times M_B$  gemischter Strategien seien  $P_1(a, b) := a^T A b$  und  $P_2(a, b) := a^T B b$  die erwarteten Auszahlungen der Spieler und  $P(a, b) := (P_1(a, b), P_2(a, b))$ . Die Menge

$$P(E_G) := \{P(a, b) : (a, b) \in E_G\}$$

sei die Menge aller Auszahlungen gemischter Nash-Equilibrien von  $G$  und für  $i \in S_A$  sei  $P_1(b|a_i = 1)$  die erwartete Auszahlung für Spieler  $\mathcal{A}$ , wenn er die gemischte Strategie  $a' \in M_A$  mit  $a'_i = 1$  wählt und Spieler  $\mathcal{B}$  die gemischte Strategie  $b$  (analog für Spieler  $\mathcal{B}$ ). Die konvexe Hülle zweier Zahlen  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$\text{conv}\{x_1, x_2\} := \{tx_1 + (1-t)x_2 : t \in [0, 1]\} = [\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}]$$

### 3.2 Equilibriumsbedingungen für 2-Spieler-Spiele

Für den Satz im Folgenden Abschnitt ist es nützlich, die Bedingungen für gemischte Nash-Equilibrien über Matrizen auszudrücken und auf die erwarteten Auszahlungen der reinen Strategien zurückzuführen. Es gilt folgendes Lemma:

**Lemma 3.1** *Sei  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern.*

*Ein Tupel  $(a, b)$  gemischter Strategien von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  ist genau dann ein gemischtes Nash-Equilibrium von  $G$ , wenn für die Auszahlungsmatrizen  $A$  und  $B$  mit  $A_{i,j} := U_1(i, j)$  und  $B_{i,j} := U_2(i, j)$  reelle Zahlen  $c, d \in \mathbb{R}$  existieren, sodass für alle  $(i, j) \in \text{supp}(a, b)$  und  $(k, l) \in S_A \times S_B$  gilt:*

$$\begin{aligned} (Ab)_i &= c \\ (Ab)_k &\leq c \\ (B^T a)_j &= d \\ (B^T a)_l &\leq d \end{aligned}$$

*Für die erwartete Auszahlung von  $(a, b)$  gilt dann:*

$$P(a, b) = (c, d)$$

**Beweis.** Sei  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern.

Wenn  $(a, b)$  ein gemischtes Nash-Equilibrium von  $G$  ist, dann stimmen nach Satz 2.6 für beide Spieler die erwarteten Auszahlungen der mit Wahrscheinlichkeit größer 0 gespielten Strategien überein, d.h. für alle  $(i, j), (i', j') \in \text{supp}(a, b)$  ist:

$$\begin{aligned}(Ab)_i &= P_1(b|a_i = 1) = P_1(b|a_{i'} = 1) = (Ab)_{i'} =: c \in \mathbb{R} \\ (B^T a)_j &= P_2(a|b_j = 1) = P_2(a|b_{j'} = 1) = (Ab)_{j'} =: d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ebenfalls mit Satz 2.6 ergibt sich dann die erwartete Auszahlung des Nash-Equilibriums zu  $P(a, b) = (c, d)$ . Weiter können die erwarteten Auszahlungen aller Strategien  $k \in S_A$  bzw.  $l \in S_B$  nicht größer wie  $c$  bzw.  $d$  sein, da sonst für  $a' \in M_A$  bzw.  $b' \in M_B$  mit  $a'_k = b'_l = 1$  gilt:

$$\begin{aligned}P_1(a', b) &= a'^T Ab = (Ab)_k > c = P_1(a, b) \\ P_2(a, b') &= b'^T B^T a = (B^T a)_l > d = P_2(a, b)\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

$$\begin{aligned}(Ab)_k &\leq c \\ (B^T a)_l &\leq d\end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt  $(a, b) \in M_A \times M_B$  und  $c, d \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $(i, j) \in \text{supp}(a, b)$  und  $(k, l) \in S_A \times S_B$  gilt:

$$\begin{aligned}(Ab)_i &= c \\ (Ab)_k &\leq c \\ (B^T a)_j &= d \\ (B^T a)_l &\leq d\end{aligned}$$

Dann gilt für die erwarteten Auszahlungen der Spieler

$$\begin{aligned}P_1(a, b) &= \sum_{i \in S_A} a_i (Ab)_i = \sum_{i \in \text{supp}(a)} a_i (Ab)_i \\ &= \sum_{i \in \text{supp}(a)} a_i c = c \sum_{i \in \text{supp}(a)} a_i = c \sum_{i \in S_A} a_i = c \\ P_2(a, b) &= \sum_{j \in S_B} b_j (B^T a)_j = \sum_{j \in \text{supp}(b)} b_j (B^T a)_j \\ &= \sum_{j \in \text{supp}(b)} b_j d = d \sum_{j \in \text{supp}(b)} b_j = d \sum_{j \in S_B} b_j = d\end{aligned}$$

und für alle  $a' \in M_A$  und  $b' \in M_B$  ist

$$\begin{aligned}P_1(a', b) &= \sum_{i \in S_A} a'_i (Ab)_i \leq \sum_{i \in S_A} a'_i c = c \sum_{i \in S_A} a'_i = c = P_1(a, b) \\ P_2(a, b') &= \sum_{i \in S_B} b'_i (B^T a)_i \leq \sum_{i \in S_B} b'_i d = d \sum_{i \in S_A} a'_i = d = P_2(a, b)\end{aligned}$$

womit  $(a, b)$  ein Nash-Equilibrium ist. □

### 3.3 Konvexkombinationen von Nash-Equilibrien

Die Struktur der Auszahlungsmengen ergibt sich im Wesentlichen dadurch, dass für zwei Nash-Equilibrien gleichen Trägers die Konvexkombination der Spielerstrategien erneut ein Nash-Equilibrium bildet. Es gilt:

**Lemma 3.2** Sei  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern und  $(a, b), (a', b')$  gemischte Nash-Equilibrien von  $G$  mit gleichem Träger. Weiter seien  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  und

$$\begin{aligned}\bar{a}(t_1) &:= t_1 a + (1 - t_1) a' \\ \bar{b}(t_2) &:= t_2 b + (1 - t_2) b'\end{aligned}$$

Dann ist  $(\bar{a}, \bar{b})$  ein gemischtes Nash-Equilibrium von  $G$  und es gilt:

$$\begin{aligned}P_1(\bar{a}, \bar{b}) &= t_2 P_1(a, b) + (1 - t_2) P_1(a', b') \\ P_2(\bar{a}, \bar{b}) &= t_1 P_2(a, b) + (1 - t_1) P_2(a', b') \\ \text{supp}(\bar{a}, \bar{b}) &= \text{supp}(a, b) = \text{supp}(a', b')\end{aligned}$$

**Beweis.** Sei  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern,  $(a, b)$  und  $(a', b')$  gemischte Nash-Equilibrien von  $G$  mit gleichem Träger,  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  und

$$\begin{aligned}\bar{a}(t_1) &:= t_1 a + (1 - t_1) a' \\ \bar{b}(t_2) &:= t_2 b + (1 - t_2) b'\end{aligned}$$

Da  $a, a' \in M_A$  und  $b, b' \in M_B$  gemischte Strategien sind, sind auch  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  gemischte Strategien, da für alle  $i \in S_A$  und  $j \in S_B$

$$\begin{aligned}\bar{a}_i &= (t_1 a + (1 - t_1) a')_i \\ &= t_1 a_i + (1 - t_1) a'_i \in \text{conv}\{a_i, a'_i\} \subseteq [0, 1] \\ \bar{b}_j &= (t_2 b + (1 - t_2) b')_j \\ &= t_2 b_j + (1 - t_2) b'_j \in \text{conv}\{b_j, b'_j\} \subseteq [0, 1]\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\sum_{i \in S_A} \bar{a}_i &= \sum_{i \in S_A} (t_1 a + (1 - t_1) a')_i \\ &= \sum_{i \in S_A} t_1 a_i + (1 - t_1) a'_i \\ &= t_1 \sum_{i \in S_A} a_i + (1 - t_1) \sum_{i \in S_A} a'_i \\ &= t_1 + (1 - t_1) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S_B} \bar{b}_j &= \sum_{j \in S_B} (t_2 a + (1 - t_2) b')_j \\
&= \sum_{j \in S_B} t_2 a_j + (1 - t_2) b'_j \\
&= t_2 \sum_{j \in S_B} a_j + (1 - t_2) \sum_{j \in S_B} b'_j \\
&= t_2 + (1 - t_2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Weiter gilt für den Träger

$$\text{supp}(\bar{a}, \bar{b}) = \text{supp}(a, b) = \text{supp}(a', b')$$

da für alle  $i \in \text{supp}(a) = \text{supp}(a')$  und  $j \in \text{supp}(b) = \text{supp}(b')$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_i &= t_1 a_i + (1 - t_1) a'_i > 0 \\
\bar{b}_j &= t_2 b_j + (1 - t_2) b'_j > 0
\end{aligned}$$

und für alle  $i \notin \text{supp}(a) = \text{supp}(a')$  und  $j \notin \text{supp}(b) = \text{supp}(b')$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_i &= t_1 a_i + (1 - t_1) a'_i = 0 \\
\bar{b}_j &= t_2 b_j + (1 - t_2) b'_j = 0
\end{aligned}$$

Betrachte nun die gegebenen Nash-Equilibrien  $(a, b)$  und  $(a', b')$ .

Nach Lemma 3.1 existieren  $c, d \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $(i, j) \in \text{supp}(a, b)$  und  $(k, l) \in S_A \times S_B$

$$\begin{aligned}
(Ab)_i &= c \\
(Ab)_k &\leq c \\
(B^T a)_j &= d \\
(B^T a)_l &\leq d
\end{aligned}$$

und für  $(a', b')$  existieren analog  $c', d' \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $(i, j) \in \text{supp}(a', b')$  und  $(k, l) \in S_A \times S_B$

$$\begin{aligned}
(Ab')_i &= c' \\
(Ab')_k &\leq c' \\
(B^T a')_j &= d' \\
(B^T a')_l &\leq d'
\end{aligned}$$

Damit ist für alle  $(i, j) \in \text{supp}(\bar{a}, \bar{b}) = \text{supp}(a', b') = \text{supp}(a, b)$  und  $(k, l) \in S_A \times S_B$

$$\begin{aligned}
(\bar{A}\bar{b})_i &= (A(t_2 b + (1 - t_2) b'))_i \\
&= (t_2 Ab + (1 - t_2) Ab')_i \\
&= t_2 (Ab)_i + (1 - t_2) (Ab')_i \\
&= t_2 c + (1 - t_2) c' =: \bar{c} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{A}\bar{b})_k &= (A(t_2b + (1-t_2)b'))_k \\
&= (t_2Ab + (1-t_2)Ab')_k \\
&= t_2(Ab)_k + (1-t_2)(Ab')_k \\
&\leq t_2c + (1-t_2)c' = \bar{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B^T\bar{a})_j &= (B^T(t_1a + (1-t_1)a'))_j \\
&= (t_1B^T a + (1-t_1)B^T a')_j \\
&= t_1(B^T a)_j + (1-t_1)(B^T a')_j \\
&= t_1d + (1-t_1)d' =: \bar{d} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B^T\bar{a})_l &= (B^T(t_1a + (1-t_1)a'))_l \\
&= (t_1B^T a + (1-t_1)B^T a')_l \\
&= t_1(B^T a)_l + (1-t_1)(B^T a')_l \\
&\leq t_1d + (1-t_1)d' = \bar{d}
\end{aligned}$$

und somit  $(\bar{a}, \bar{b})$  nach Lemma 3.1 ein Nash-Equilibrium von  $G$ .  
Zudem gilt für die erwarteten Auszahlungen der Spieler:

$$\begin{aligned}
P_1(\bar{a}, \bar{b}) &= \bar{c} = t_2c + (1-t_2)c' = t_2P_1(a, b) + (1-t_2)P_1(a', b') \\
P_2(\bar{a}, \bar{b}) &= \bar{d} = t_1d + (1-t_1)d' = t_1P_2(a, b) + (1-t_1)P_2(a', b')
\end{aligned}$$

□

### 3.4 Struktur der Auszahlungsmengen

Mit Hilfe von Lemma 3.1 und 3.2 lässt sich nun beweisen:

**Satz 3.3** *Die Menge  $P^*$  aller Auszahlungsmengen  $P(E_G)$  auf gemischten Nash-Equilibrien von endlichen, reellwertigen Spielen  $G := (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  mit zwei Spielern ist gleich der Menge*

$$R := \{\cup_{i=1}^n [c_i, d_i] \times [c'_i, d'_i] : c_i \leq d_i; c'_i \leq d'_i \quad c_i, d_i, c'_i, d'_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+\}$$

*aller nicht leeren, endlichen Vereinigungen von abgeschlossenen Rechtecken, achsenparallelen Geradensegmenten und Punkten in  $\mathbb{R}^2$ .*

**Beweis.** Sei  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern. Betrachte die Menge aller gemischten Nash-Equilibrien von  $G$  mit gleichem Träger  $S$

$$E_G^S := \{(a, b) \in E_G : \text{supp}(a, b) = S\} \subseteq E_G$$

und das Supremum bzw. Infimum der Auszahlungen auf dieser Menge für beide Spieler

$$\begin{aligned}
p^{1+} &:= \sup_{(a,b) \in E_G^S} P_1(a, b) \\
p^{2+} &:= \sup_{(a,b) \in E_G^S} P_2(a, b) \\
p^{1-} &:= \inf_{(a,b) \in E_G^S} P_1(a, b) \\
p^{2-} &:= \inf_{(a,b) \in E_G^S} P_2(a, b)
\end{aligned}$$

Dann existieren für jedes hinreichend kleine  $\epsilon > 0$  gemischte Nash-Equilibrien  $e^{1+}, e^{2+}, e^{1-}, e^{2-} \in E_G^S$  mit

$$\begin{aligned}
P_1(e^{1+}) &> p^{1+} - \epsilon \\
P_2(e^{2+}) &> p^{2+} - \epsilon \\
P_1(e^{1-}) &< p^{1-} + \epsilon \\
P_2(e^{2-}) &< p^{2-} + \epsilon
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist für  $(a, b), (a', b') \in E_G^S$

$$\begin{aligned}
K &:= \text{conv}\{a, a'\} \times \text{conv}\{b, b'\} \subseteq E_G^S \\
P(K) &:= \{P(\bar{a}, \bar{b}) : (\bar{a}, \bar{b}) \in K\} \\
&= \text{conv}\{P_1(a, b), P_1(a', b')\} \times \text{conv}\{P_2(a, b), P_2(a', b')\}
\end{aligned}$$

und es existieren Equilibrien  $e^+, e^- \in E_G^S$  mit

$$\begin{aligned}
P(e^+) &> (p^{1+} - \epsilon, p^{2+} - \epsilon) \\
P(e^-) &< (p^{1-} + \epsilon, p^{2-} + \epsilon)
\end{aligned}$$

Eine erneute Anwendung von Lemma 3.2 zeigt die Existenz von  $K' \subseteq E_G^S$  mit

$$\begin{aligned}
P(K') &= \text{conv}\{P_1(e^+), P_1(e^-)\} \times \text{conv}\{P_2(e^+), P_2(e^-)\} \\
&\supseteq [p^{1-} + \epsilon, p^{1+} - \epsilon] \times [p^{2-} + \epsilon, p^{2+} - \epsilon]
\end{aligned}$$

Da dies für alle  $\epsilon > 0$  gilt, kann für jedes  $p \in (p^{1-}, p^{1+}) \times (p^{2-}, p^{2+})$  ein  $K' \subseteq E_G^S$  mit  $p \in P(K')$  gefunden werden, womit  $p \in P(K') \subseteq P(E_G^S)$  und damit insgesamt

$$(p^{1-}, p^{1+}) \times (p^{2-}, p^{2+}) \subseteq P(E_G^S) \subseteq [p^{1-}, p^{1+}] \times [p^{2-}, p^{2+}]$$

Da die Auszahlungsfunktion  $P(a, b)$  stetig ist ergibt sich für den Abschluss  $\bar{E}_G^S$

$$P(\bar{E}_G^S) = [p^{1-}, p^{1+}] \times [p^{2-}, p^{2+}]$$



Zudem ist die Menge der gemischten Nash-Equilibrien  $E_G$  immer abgeschlossen, woraus  $\bar{E}_G^S \subseteq E_G$  folgt. Sei nun für die Potenzmengen  $\mathcal{P}(S_A)$  und  $\mathcal{P}(S_B)$

$$S^* := \mathcal{P}(S_A) \setminus \{\emptyset\} \times \mathcal{P}(S_B) \setminus \{\emptyset\}$$

die Menge aller möglichen Träger von  $G$ . Dann ist

$$E_G = \bigcup_{S \in S^*} \bar{E}_G^S$$

$$P(E_G) = \bigcup_{S \in S^*} P(\bar{E}_G^S)$$

Da  $S_A$  und  $S_B$  endlich sind ist auch  $S^*$  endlich und damit  $P(E_G)$  eine endliche Vereinigung von Intervallen der Form  $[p^{1-}, p^{1+}] \times [p^{2-}, p^{2+}]$ , d.h.  $P(E_G) \in P^*$ . Bleibt zu zeigen, dass für jedes  $p^* \in P^*$  ein Spiel  $G$  existiert, sodass  $P(E_G) \in P^*$ . Betrachte hierzu für  $c, c', d, d' \in \mathbb{R}$  ein Gleichgültigkeitsspiel  $G_1$ :

	$b_1$	$b_2$
$a_1$	$c, c'$	$d, d'$
$a_2$	$c, d'$	$d, d'$

mit  $c \leq d$  und  $c' \leq d'$ .

Dann ist jedes Tupel  $(a, b) \in M_A \times M_B$  gemischter Strategien ein gemischtes Nash-Equilibrium mit den Auszahlungen

$$P_1(a, b) = b_1 c + b_2 d = b_1 c + (1 - b_1) d$$

$$P_2(a, b) = a_1 c' + a_2 d' = a_1 c' + (1 - a_1) d'$$

und für die Menge  $P(E_G)$  der Auszahlungen auf Nash-Equilibrien gilt:

$$P(E_G) = [c, d] \times [c', d']$$

Sei nun  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein beliebiges endliches, reellwertiges Spiel mit  $n, m \in \mathbb{N}$  Strategien für die beiden Spieler  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ . Erweitere nun  $G$  um zwei Strategien für beide Spieler zu  $G' = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S'_A \times S'_B, U')$ , sodass

	$b_1$	$\dots$	$b_n$	$b_{n+1}$	$b_{n+2}$
$a_1$	$A_{11}, B_{11}$	$\dots, \dots$	$A_{1n}, B_{1n}$	$c, b^-$	$d, b^-$
$\vdots$	$\vdots, \vdots$	$\ddots, \ddots$	$\vdots, \vdots$	$\vdots, \vdots$	$\vdots, \vdots$
$a_m$	$A_{m1}, B_{m1}$	$\dots, \dots$	$A_{mn}, B_{mn}$	$c, b^-$	$d, b^-$
$a_{m+1}$	$a^-, c'$	$\dots, \dots$	$a^-, c'$	$c, c'$	$d, c'$
$a_{m+2}$	$a^-, d'$	$\dots, \dots$	$a^-, d'$	$c, d'$	$d, d'$

mit

$$a^- := \min_{(i,j) \in S_A \times S_B} A_{ij} - 1$$

$$b^- := \min_{(i,j) \in S_A \times S_B} B_{ij} - 1$$

und  $c, c', d, d' \in \mathbb{R}$ . Es soll nun gezeigt werden, dass dann für die Auszahlungsmenge der gemischten Nash-Equilibrien von  $G'$  gilt:

$$P(E_{G'}) = P(E_G) \cup ([c, d] \times [c', d'])$$

Dies wäre ausreichend, da dann beginnend bei Spiel  $G_1$  durch endlich viele Ergänzungen dieser Art für jede endliche Vereinigung  $p_*$  von Intervallen der obigen Form ein passendes Spiel  $G^*$  mit  $P(E_{G^*}) = p_*$  konstruiert werden kann.

Betrachte also ein gemischtes Nash-Equilibrium  $(a, b) \in E_G$  von  $G$ . Dann ist  $(a', b') \in M'_A \times M'_B$  mit  $a' = (a, 0, 0)$  und  $b' = (b, 0, 0)$  ein Nash-Equilibrium von  $G'$  mit  $P(a', b') = P(a, b)$ , da für beide Spieler die ergänzten Strategien  $a_{m+1}, a_{m+2}$  bzw.  $b_{n+1}, b_{n+2}$  von allen Strategien aus  $G$  schwach dominiert werden. Umgekehrt gibt es für jedes gemischte Nash-Equilibrium  $(a', b') \in E_{G'}$  mit  $\text{supp}(a', b') \subseteq S_A \times S_B$  ein passendes Nash-Equilibrium  $(a, b) \in E_G$  mit  $P(a', b') = P(a, b)$ , d.h. für die Menge der Auszahlungen auf gemischten Nash-Equilibrien  $P(E_{G'}^{\subseteq S})$  von  $G'$  mit Träger in  $S = S_A \times S_B$  gilt insgesamt:

$$P(E_{G'}^{\subseteq S}) = \{P(a', b') : (a', b') \in M'_A \times M'_B, \text{supp}(a', b') \subseteq S\} = P(E_G)$$

Betrachte nun die verbleibende Menge der Nash-Equilibrien  $E_{G'}^+ := E_{G'} \setminus E_{G'}^{\subseteq S}$ , deren Träger mindestens eine der ergänzten Strategien enthält. Es ist  $E_{G'}^+ \neq \emptyset$ , da  $(a', b') \in M'_A \times M'_B$  mit  $a_{m+2} = b_{n+2} = 1$  offensichtlich ein gemischtes Nash-Equilibrium aus  $E_{G'}^+$  ist.

Sei also  $(a', b') \in E_{G'}^+$  ein gemischtes Nash-Equilibrium mit  $m+1 \in \text{supp}(a)$  oder  $m+2 \in \text{supp}(a)$ . Da für alle  $b \in M'_B$  mit  $\text{supp}(b) \cap S_B \neq \emptyset$

$$(Ab)_1 > (Ab)_{m+1} = (Ab)_{m+2}$$

muss  $\text{supp}(b') \cap S_B = \emptyset$  sein, da sonst die Equilibriumsbedingung aus Lemma 3.1 verletzt ist. Analog ist für alle  $a \in M'_A$  mit  $\text{supp}(a) \cap S_A \neq \emptyset$

$$(B^T a)_1 > (B^T a)_{n+1} = (B^T a)_{n+2}$$

womit  $\text{supp}(a') \cap S_A = \emptyset$  sein muss. Also ist für alle  $(a', b') \in E_{G'}^+$  der Träger  $\text{supp}(a', b') \subseteq \{m+1, m+2\} \times \{n+1, n+2\}$ . Trivialerweise sind alle  $(a', b') \in M'_A \times M'_B$  mit diesem Träger gemischte Nash-Equilibrien von  $G'$  mit der gleichen Auszahlungsmenge wie in  $G_1$ , d.h. es ist

$$P(E_{G'}) = P(E_{G'}^{\subseteq S}) \cup P(E_{G'}^+) = P(E_G) \cup ([c, d] \times [c', d'])$$

□

**Scholium 3.4** Sei  $G = (\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}, S_A \times S_B, U)$  ein endliches, reellwertiges Spiel mit 2 Spielern und  $m, n \in \mathbb{N}$  die Strategieanzahlen der Spieler. Dann haben die pareto-optimalen (gemischten) Nash-Equilibrien von  $G$  höchstens  $(2^m - 1)(2^n - 1)$  verschiedene Auszahlungen.

**Beweis.** Nach Satz 1 besteht  $P(E_G)$  aus der Vereinigung endlich vieler Mengen der Form  $[c, d] \times [c', d'] \subseteq \mathbb{R}^2$ . Für jedes pareto-optimale Equilibrium

$(a, b) \in E_G$  mit  $P(a, b) \in [c, d] \times [c', d']$  ist offensichtlich  $P(a, b) = (d, d')$  die einzige mögliche Auszahlung, da sonst die Pareto-Optimalität verletzt ist. Wie im Beweis von Satz 1 kann man zeigen, dass die Anzahl der möglichen Mengen  $[c, d] \times [c', d']$  gleich der Anzahl der möglichen Trägermengen aus  $S^* := \mathcal{P}(S_A) \setminus \{\emptyset\} \times \mathcal{P}(S_B) \setminus \{\emptyset\}$  ist. Deren Anzahl ergibt sich offensichtlich zu

$$|S^*| := |\mathcal{P}(S_A) \setminus \{\emptyset\}| |\mathcal{P}(S_B) \setminus \{\emptyset\}| = (2^m - 1)(2^n - 1)$$

□

## 4 Auszahlungsmengen für 3 Spieler

Da seit dem Ende des kalten Krieges Spiele mit 3 oder mehr Spielern erheblich an Bedeutung gewinnen, sollen nun auch die Auszahlungsmengen für 3 Spieler betrachtet werden. Es wird sich zeigen, dass sich bereits für die vollständig gemischten Nash-Equilibrien Spiele konstruieren lassen, deren Auszahlungen aller vollständig gemischten Nash-Equilibrien beliebig komplexen algebraischen Varietäten entsprechen. Dabei wird die von Datta gezeigte Universalität von Nash-Equilibrien (Datta, 2003) bezüglich algebraischer Varietäten ausgenutzt und auf die Auszahlungsmenge erweitert.

**Satz 4.1** *Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte algebraische Varietät.*

*Dann existiert ein endliches, reellwertiges Spiel  $G$  mit 3 Spielern, sodass die Menge der erwarteten Auszahlungen  $P(\hat{E}_G)$  der vollständig gemischten Equilibrien  $\hat{E}_G$  von  $G$  gleich  $V$  ist.*

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der beiden folgenden Lemmas.

Verwendet werden dabei folgende Notationen:

### 4.1 Notationen

Die betrachteten Spiele besitzen jeweils 3 Spieler  $A, B, C$  mit Strategiemengen  $S_A = \{0, 1, \dots, n_a\}$ ,  $S_B = \{0, 1, \dots, n_b\}$  bzw.  $S_C = \{0, 1, \dots, n_c\}$  mit  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}^+$  und eine Auszahlungsfunktion  $U : S_A \times S_B \times S_C \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Für eine gegebene gemischte Strategie  $c \in \Delta^{n_c+1}$  von Spieler  $C$  sei  $c_j$  mit  $j \in S_C$  die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler  $C$  die  $j$ -te Strategie wählt. Weiter sei  $U_3(h, i, j)$  die Auszahlung von Spieler  $C$ , wenn die Spieler  $A, B, C$  die Strategien  $h, i, j$  wählen und  $P_3(a, b | c_j = 1)$  sei die erwartete Auszahlung von Spieler  $C$  wenn er seine  $j$ -te Strategie mit Wahrscheinlichkeit 1 wählt und Spieler  $A$  und  $B$  die gemischten Strategien  $a$  und  $b$ . Für die anderen Spieler werden die Bezeichnungen analog verwendet.

### 4.2 Konstruktion erwarteter Auszahlungen

**Lemma 4.2** *Sei  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n_c\}$ ,  $S = \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\} \times \{0, 1, \dots, n_c\}$ .*

Für alle  $(\lambda_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\lambda_{hi} \in \mathbb{R}$  existiert  $(\bar{\lambda}_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\bar{\lambda}_{hi} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}$  für alle  $(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und jedes Tupel  $(a, b, c)$  gemischter Strategien gilt:

$$P_3(a, b | c_j = 1) = \lambda_{00} + \sum_{h=1}^{n_a} \lambda_{h0} a_h + \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{0i} b_i + \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{hi} a_h b_i \quad (*)$$

**Beweis.** Sei  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, n_c\}$ ,  $S = \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\} \times \{0, 1, \dots, n_c\}$ ,  $(a, b, c)$  ein Tupel gemischter Strategien und  $(\lambda_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\lambda_{hi} \in \mathbb{R}$  eine Familie reeller Zahlen. Für jedes endliche, reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  gilt für jedes Tupel  $(a, b, c)$  gemischter Strategien für die erwartete Auszahlung von Spieler  $C$  bei Wahl seiner  $j$ -ten Strategie:

$$P_3(a, b | c_j = 1) = \sum_{h=0}^{n_a} \sum_{i=0}^{n_b} a_h b_i U_3(h, i, j)$$

Durch Einsetzen von

$$a_0 = 1 - \sum_{h=1}^{n_a} a_h$$

$$b_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n_b} b_i$$

sowie Ausmultiplizieren und Faktorisieren ergibt sich

$$\begin{aligned} P_3(a, b | c_j = 1) &= U_3(0, 0, j) \\ &+ \sum_{h=1}^{n_a} a_h (U_3(h, 0, j) - U_3(0, 0, j)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_b} b_i (U_3(0, i, j) - U_3(0, 0, j)) \\ &+ \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} a_h b_i (U_3(h, i, j) - U_3(h, 0, j) - U_3(0, i, j) + U_3(0, 0, j)) \end{aligned}$$

Es müssen nun passende  $(\bar{\lambda}_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  gefunden werden, damit diese Gleichung für  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}$  mit (\*) übereinstimmt.

Dies ist machbar, indem erst  $\bar{\lambda}_{00}$ , dann die  $\bar{\lambda}_{h0}$  und  $\bar{\lambda}_{0i}$  mit  $h, i \neq 0$  und dann die verbleibenden  $\bar{\lambda}_{hi}$  gewählt werden. Die passende Wahl ergibt sich so für

$(h, i) \in \{1, 2, \dots, n_a\} \times \{1, 2, \dots, n_b\}$  zu:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{00} &:= \lambda_{00} \\ \bar{\lambda}_{h0} &:= \lambda_{h0} + \lambda_{00} \\ \bar{\lambda}_{0i} &:= \lambda_{0i} + \lambda_{00} \\ \bar{\lambda}_{hi} &:= \lambda_{hi} + \lambda_{h0} + \lambda_{0i} + \lambda_{00}\end{aligned}$$

□

### 4.3 Konstruktion notwendiger Bedingungen

**Lemma 4.3** Sei  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}^+$ ,  $j \in \{1, \dots, n_c\}$  und  $S = \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\} \times \{0, 1, \dots, n_c\}$ .

Für alle  $(\lambda_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\lambda_{hi} \in \mathbb{R}$  existiert  $(\bar{\lambda}_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\bar{\lambda}_{hi} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}$  für alle  $(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und jedes vollständig gemischte Nash-Equilibrium  $(a, b, c)$  von  $G$  gilt:

$$\lambda_{00} + \sum_{h=1}^{n_a} \lambda_{h0} a_h + \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{0i} b_i + \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{hi} a_h b_i = 0 \quad (**)$$

und für alle Tupel gemischter Strategien  $(a', b', c')$  von  $G$ , die  $(**)$  erfüllen, gilt:

$$P(a', b' | c'_j = 1) = P(a', b' | c'_0 = 1)$$

Beachte, dass somit insbesondere Polynome ersten Grades als notwendige Bedingung für vollständig gemischte Nash-Equilibrien konstruiert werden können.

**Beweis.** Sei  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}^+$ ,  $j \in \{1, \dots, n_c\}$ ,  $S = \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\} \times \{0, 1, \dots, n_c\}$  und  $(\lambda_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\lambda_{hi} \in \mathbb{R}$  eine Familie reeller Zahlen.

Nach Lemma 4.2 existieren  $(\bar{\lambda}_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}$  für alle  $(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und jedes Tupel  $(a, b, c)$  gemischter Strategien

von  $A$  und  $B$  gilt:

$$\begin{aligned}
P_3(a, b|c_j = 1) &= (U_3(0, 0, 0) + \lambda_{00}) \\
&+ \sum_{h=1}^{n_a} a_h (U_3(h, 0, 0) - U_3(0, 0, 0) + \lambda_{h0}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n_b} b_i (U_3(0, i, 0) - U_3(0, 0, 0) + \lambda_{0i}) \\
&+ \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} a_h b_i (U_3(h, i, 0) - U_3(h, 0, 0) - U_3(0, i, 0) + U_3(0, 0, 0) + \lambda_{hi}) \\
&= P_3(a, b|c_0 = 1) + \lambda_{00} + \sum_{h=1}^{n_a} \lambda_{h0} a_h + \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{0i} b_i + \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{hi} a_h b_i
\end{aligned}$$

Ist  $(a, b, c)$  ein vollständig gemischtes Equilibrium, dann müssen nach Satz 2.6 die reinen Strategien eines Spielers die gleichen erwarteten Auszahlungen haben, d.h. es gilt

$$P_3(a, b|c_j = 1) = P_3(a, b|c_0 = 1)$$

und damit wie gefordert

$$\lambda_{00} + \sum_{h=1}^{n_a} \lambda_{h0} a_h + \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{0i} b_i + \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{hi} a_h b_i = 0 \quad (**)$$

Ist umgekehrt  $(**)$  erfüllt für ein Tupel gemischter Strategien  $(a', b', c')$ , so folgt aus obiger Gleichung unmittelbar  $P_3(a', b'|c'_j = 1) = P_3(a', b'|c'_0 = 1)$ .  $\square$

#### 4.4 Beweis von Satz 4.1

Mit Hilfe der beiden Lemmas 4.2 und 4.3 kann nun Satz 4.1 bewiesen werden.

**Beweis.** Sei  $V \subset \mathbb{R}^3$  eine beschränkte algebraische Varietät.

Da  $V$  beschränkt ist, existiert eine bijektive Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(\vec{x}) = k\vec{x} + \vec{l}$$

mit  $k \in \mathbb{R}^+$  und  $\vec{l} \in \mathbb{R}^3$  so, dass das Bild  $\phi(V)$  von  $V$  im Inneren des 3-Simplex  $\mathring{\Delta}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i < 1, x_i \in (0, 1)\}$  liegt.

Sei nun  $n_a, n_b, n_c \in \mathbb{N}^+$  und  $S = \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\} \times \{0, 1, \dots, n_c\}$

Nach Lemma 4.2 existieren

$$\begin{aligned}
&(\bar{\lambda}_{ij}^{(A,0)})_{(i,j) \in \{0,1,\dots,n_b\} \times \{0,1,\dots,n_c\}} \\
&(\bar{\lambda}_{hj}^{(B,0)})_{(h,j) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_c\}} \\
&(\bar{\lambda}_{hi}^{(C,0)})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}
\end{aligned}$$

mit  $\bar{\lambda}_{ij}^{(A,0)}, \bar{\lambda}_{hj}^{(B,0)}, \bar{\lambda}_{hi}^{(C,0)} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit

$$\begin{aligned} U_1(0, i, j) &= \bar{\lambda}_{ij}^{(A,0)} \\ U_2(h, 0, j) &= \bar{\lambda}_{hj}^{(B,0)} \\ U_3(h, i, 0) &= \bar{\lambda}_{hi}^{(C,0)} \end{aligned}$$

für alle  $(h, i, j) \in S$  und jedes Tupel  $(a, b, c)$  gemischter Strategien gilt:

$$\begin{aligned} P_1(b, c|a_0 = 1) &= c_1/k - l_1/k \\ P_2(a, c|b_0 = 1) &= a_2/k - l_2/k \\ P_3(a, b|c_0 = 1) &= a_3/k - l_3/k \end{aligned}$$

Nach Satz 2.6 stimmen dann die erwartete Auszahlung jedes vollständig gemischten Equilibriums überein, womit für jedes vollständig gemischte Nash-Equilibrium  $(a, b, c)$  von  $G$  gilt:

$$P(a, b, c) = \begin{pmatrix} P_1(b, c|a_0 = 1) \\ P_2(a, c|b_0 = 1) \\ P_3(a, b|c_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1/k - l_1/k \\ a_2/k - l_2/k \\ a_3/k - l_3/k \end{pmatrix} = \phi^{-1}(c_1, a_2, a_3) \quad (1)$$

Mit Hilfe von Lemma 4.3 werden nun weitere Bedingungen konstruiert, sodass für ein Spiel, das alle diese Bedingungen erfüllt, für die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : \hat{E}_G &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \pi(a, b, c) &:= (c_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

auf der Menge  $\hat{E}_G$  der vollständig gemischten Equilibrien von  $G$  gilt:

$$\pi(\hat{E}_G) = \phi(V)$$

da daraus unmittelbar folgt:

$$P(\hat{E}_G) = \phi^{-1} \circ \pi(\hat{E}_G) = V$$

Weil  $\phi$  nur eine Verschiebung und Skalierung ist, ist auch  $\phi(V)$  eine algebraische Varietät<sup>3</sup> und damit gegeben durch  $M$  polynomiale Gleichungen der Form  $p_t(x_1, x_2, x_3) = 0$  mit  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Nach Lemma 4.2 existiert für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n_c\}$  und  $(\lambda_{hi})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$  mit  $\lambda_{hi} \in \mathbb{R}$  eine Familie  $(\bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)})_{(h,i) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_b\}}$ , mit  $\bar{\lambda}^{(C,j)} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}^{(C,j)}$  für alle

<sup>3</sup>Beachte, dass eine Verschiebung oder Skalierung von Variablen innerhalb eines Polynoms erneut ein Polynom ergibt.

$(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und jedes vollständig gemischte Nash-Equilibrium  $(a, b, c)$  von  $G$  gilt:

$$\lambda_{00} + \sum_{h=1}^{n_a} \lambda_{h0} a_h + \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{0i} b_i + \sum_{h=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{n_b} \lambda_{hi} a_h b_i = 0$$

Diese Bedingungen sollen nun so gewählt werden, dass für jedes vollständig gemischte Equilibrium die Gleichungen  $p_t(a_1, a_2, a_3) = 0$  mit  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$  gelten.

Sei dazu  $d_{it}$  die maximale Potenz von  $a_i$  in der  $t$ -ten Gleichung. Die  $t$ -te Gleichung lässt sich dann schreiben als

$$p_t(a_1, a_2, a_3) = a_1^{d_{1t}} p'_{td_{1t}} + a_1^{(d_{1t}-1)} p'_{t(d_{1t}-1)} + \dots + a_1^0 p'_{t0}$$

wobei die  $p'_{ts} = p'_{ts}(a_2, a_3)$  Polynome in  $a_2$  und  $a_3$  sind. Schreibt man diese wiederum auf gleiche Weise, d.h.

$$p_{ts}(a_2, a_3) = a_2^{d_{2t}} p''_{tsd_{2t}} + a_2^{(d_{2t}-1)} p''_{ts(d_{2t}-1)} + \dots + a_2^0 p''_{ts0}$$

und die  $p''(a_3)$  wiederum auf gleiche Weise, erhält man

$$p_t(a_1, a_2, a_3) = a_1^{d_{1t}} (a_2^{d_{2t}} (a_3^{d_{3t}} p'''_{td_{1t}d_{2t}d_{3t}} + \dots) \dots) + \dots + p'''_{t000}$$

Entsprechend des Horner-Schemas kann ein Polynom  $r$  vom Grad  $d$

$$r(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_d x^d$$

schrittweise über  $d$  Polynome ersten Grades ausgewertet werden mit

$$r = q_0 + x(q_1 + x(q_2 + \dots (q_{d-1} + xq_d)) \dots)$$

Betrachte also eine schrittweise Auswertung eines Programms  $f$ , das nacheinander die Werte  $f_j$  mit  $j \in \{1, 2, \dots, d_{3t}\}$  folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} f_1 &:= p'''_{ts_1 s_2 d_{3t}} a_3 + p'''_{ts_1 s_2 (d_{3t}-1)} \\ f_{g+1} &:= a_3 f_g + p'''_{s_1 s_2 (d_{3t}-(g+1))} \end{aligned}$$

Dann ist nach  $d_{3t}$  Schritten

$$f_{d_{3t}} = p'_{ts_1 s_2}$$

Führt man diese  $d_{3t}$  Schritte für alle  $(s_1, s_2) \in \{0, 1, \dots, d_{1j}\} \times \{0, 1, \dots, d_{2j}\}$  durch, so benötigt man insgesamt  $d_{3t}(d_{2t}+1)(d_{1t}+1)$  Schritte. Gleiches Vorgehen bezüglich  $a_2$  ergibt

$$\begin{aligned} f'_1 &:= p''_{ts_1 d_{2t}} a_2 + p''_{ts_1 (d_{2t}-1)} \\ f'_{g+1} &:= a_2 f'_g + p''_{s_1 (d_{2t}-(g+1))} \end{aligned}$$



und ebenso nach  $d_{2t}$  Schritten

$$f'_{d_{2t}} = p'_{ts_1}$$

wofür für  $s_1 \in \{0, 1, \dots, d_{1t}\}$  nur noch  $d_{2t}(d_{1t} + 1)$  Schritte benötigt werden. Nochmaliges Vorgehen bezüglich  $a_1$  liefert abschließend  $f'''_{d_{1t}} = p_t$  nach weiteren  $d_{1t}$  Schritten. Führt man alle diese

$$N_t := (d_{2t} + 1)(d_{1t} + 1) + d_{2t}(d_{1t} + 1) + d_{1t} = (d_{3t} + 1)(d_{2t} + 1)(d_{1t} + 1) - 1$$

Schritte in einem Programm  $\bar{f}^{(t)}$  nacheinander durch, so ist  $\bar{f}_{N_t}^{(t)} = p_t$ .

Weiter kann man alle  $\bar{f}^{(t)}$  nacheinander in einem Programm  $f^*$  mit Schrittanzahl  $N = \sum_{t=1}^M N_t$  durchführen. Dann existiert für alle  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$  ein  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , sodass  $f_j^* = p_t(a_1, a_2, a_3)$ . Sei  $M_p$  im Folgenden eine  $M$ -elementige Menge, die für jedes  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$  ein solches  $j$  enthält. Betrachte nun die Menge  $F$  aller möglichen Zwischenergebnisse von  $f^*$ , wenn das Tupel  $(a_1, a_2, a_3)$  im Inneren des 3-Simplex liegt, d.h.

$$F := \{(f_j^*)_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} : 0 < a_1, a_2, a_3 < 1 ; a_1 + a_2 + a_3 < 1 \}$$

Da  $F$  beschränkt ist, existiert wie oben eine bijektive Abbildung  $\phi' : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit

$$\begin{aligned} \phi'(\vec{x}) &= k' \vec{x} + \vec{l}' \quad (\text{mit } k' \in \mathbb{R}^+ \quad \vec{l}' \in \mathbb{R}^N) \\ \phi'(F) &\subseteq \mathring{\Delta}^N \end{aligned}$$

Sei nun  $n_c \geq N + M$  und  $n_b \geq N + 1$ . Da alle  $f_j^*$  (und damit auch  $k'f_j^* + l_j$ ) Polynome ersten Grades in  $a_1, a_2, a_3, f_{j-1}^*$  sind, existiert nach Lemma 4.3 für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  eine passende Familie

$(\bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)})_{(h,i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}}$  mit  $\bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)}$  für alle  $(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und jedes vollständig gemischte Nash-Equilibrium  $(a, b, c)$  von  $G$  gilt:

$$b_j - (k'f_j^* + l_j) = 0 \tag{2}$$

Ebenso existieren für  $j \in \{N + 1, N + 2, \dots, N + M\}$  Familien

$(\bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)})_{(h,i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}}$  mit  $\bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_3(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)}$  für alle  $(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und  $j \in \{N + 1, N + 2, \dots, N + M\}$  und jedes vollständig gemischte Nash-Equilibrium  $(a, b, c)$  von  $G$  für alle  $m \in M_p$  gilt:

$$b_m - (k'0 + l_m) = 0 \tag{3}$$

Ebenso existiert eine Familie  $(\bar{\lambda}_{hj}^{(B,N+1)})_{(h,j) \in \{0,1,\dots,n_a\} \times \{0,1,\dots,n_c\}}$  mit  $\bar{\lambda}_{hj}^{(B,N+1)} \in \mathbb{R}$ , sodass für jedes reellwertige Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $U_2(h, i, j) = \bar{\lambda}_{hi}^{(B,N+1)}$  für alle  $(h, i) \in \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\}$  und jedes vollständig gemischte Nash-Equilibrium  $(a, b, c)$  von  $G$  gilt:

$$c_1 - a_1 = 0 \quad (4)$$

Betrachte nun das Spiel  $G = (\{A, B, C\}, S, U)$  mit  $S = \{0, 1, \dots, n_a\} \times \{0, 1, \dots, n_b\} \times \{0, 1, \dots, n_c\}$ ,  $n_a = 3$ ,  $n_b = N + 1$  und  $n_c = N + M$ . Die Auszahlungsfunktion  $U$  sei für alle  $(h, i, j) \in S$  gegeben durch

$$\begin{aligned} U_1(h, i, j) &= \bar{\lambda}_{ij}^{(A,0)} \\ U_3(h, i, j) &= \bar{\lambda}_{hi}^{(C,j)} \end{aligned}$$

und für alle  $(h, i, j) \in S$  mit  $i \neq N + 1$

$$\begin{aligned} U_2(h, i, j) &= \bar{\lambda}_{hj}^{(B,0)} \\ U_2(h, N + 1, j) &= \bar{\lambda}_{hj}^{(B,N+1)} \end{aligned}$$

Dann ist für alle vollständig gemischten Nash-Equilibrien von  $G$  (1)-(4) erfüllt und jedes Tupel  $(a, b, c)$  vollständig gemischter Strategien von  $G$ , das (2)-(4) erfüllt, ist ein vollständig gemischtes Nash-Equilibrium, da dann per Konstruktion (siehe auch Lemma 4.3) für alle  $(h, i, j) \in S$

$$\begin{aligned} P_1(b, c|a_h = 1) &= P_1(b, c|a_0 = 1) \\ P_2(a, c|b_i = 1) &= P_2(a, c|b_0 = 1) \\ P_3(a, b|c_j = 1) &= P_3(a, b|c_0 = 1) \end{aligned}$$

womit kein Spieler seine Auszahlung einseitig verbessern kann.

Also gilt für alle vollständig gemischten Equilibrien  $(a, b, c)$  und alle  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$

$$p_t(c_1, a_2, a_3) = p_t(a_1, a_2, a_3) = 0$$

und somit  $\pi(\hat{E}_G) \subseteq \phi(V)$ . Bleibt zu zeigen, dass  $\pi(\hat{E}_G) \supseteq \phi(V)$ .

Dazu sei  $(a_1, a_2, a_3) \in \phi(V)$  und  $c_1 = a_1$ . Dann ist wegen

$$(a_1, a_2, a_3) \in \phi(V) \subseteq \mathring{\Delta}^3$$

$c_1 = a_1 \in (0, 1)$  und man kann die restlichen  $c_i$  mit  $i \in \{0, 2, 3, \dots, n_c\}$  so wählen, dass  $0 < c_i < 1$  für alle  $i \in S_C$  und  $\sum_{i=0}^{n_c} c_i = 1$ . Ebenso folgt für  $a_o := 1 - \sum_{i=1}^{n_a} a_i$ , dass  $a_0 \in (0, 1)$  und  $\sum_{i=0}^{n_a} a_i = 1$ . Setze nun  $b_i := k' f_i^* + l_i$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Wegen

$$(b_1, b_2, \dots, b_N) \in \phi'(F) \subseteq \Delta^N \setminus \partial \Delta^N$$

können  $b_0$  und  $b_{N+1}$  so gewählt werden, dass  $\sum_{i=0}^{n_b} b_i = 1$  und  $0 < b_i < 1$  für alle  $i \in S_B$ . Damit ist  $(a, b, c)$  ein Tupel vollständig gemischter Strategien. Zudem ist für alle  $f_j^*$  mit  $f_j^* = p_t$  für ein  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$

$$b_j - (k'0 + l_j) = k'f_j^* + l_j - (k'0 + l_j) = k'f_j^* = k'p_t = 0$$

womit (3) gilt. Da (2) und (4) bereits nach Konstruktion erfüllt sind, ist  $(a, b, c)$  ein vollständig gemischtes Equilibrium, d.h.

$$(a_1, a_2, a_3) = (c_1, a_2, a_3) = \pi(a, b, c) \in \pi(\hat{E}_G)$$

womit insgesamt  $\pi(\hat{E}_G) = \phi(V)$  und daher gilt:

$$P(\hat{E}_G) = \phi^{-1} \circ \pi(\hat{E}_G) = V$$

□

**Bemerkung 1:** Die Anzahl der benötigten Strategien von Spieler  $B$  und  $C$  lässt sich je nach Beschaffenheit der Polynome durch Verwendung anderer Programme teilweise stark reduzieren. Auch ohne zusätzliche Bedingungen an die Polynome sind in obiger Vorgehensweise kürzere, aber weniger anschaulich darstellbare Vorgehensweisen möglich.

**Bemerkung 2:** Die  $M$  Gleichungen  $p_t = 0$  mit  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$  von  $\phi(V)$  sind äquivalent zur Gleichung

$$\sum_{t=1}^M p_t^2 = 0$$

Verwendet man stattdessen diese Gleichung zur Konstruktion von  $f^*$  ergibt sich für die Anzahl der Strategien

$$\begin{aligned} n_a &= 3 \\ n_b &= n_c = N' + 1 \end{aligned}$$

wobei  $N' := (2 \max_j d_{3j} + 1)(2 \max_j d_{2j} + 1)(2 \max_j d_{1j} + 1) - 1$

Insbesondere bei hoher Anzahl an Gleichungen mit niedrigem Grad kann die Anzahl der benötigten Strategien so möglicherweise reduziert werden, da diese so nur vom maximalen Grad der polynomialen Gleichungen abhängig ist und nicht von deren Anzahl.

**Bemerkung 3:** Der Beweis lässt sich analog auch für  $V \subset \mathbb{R}^n$  und ein Spiel mit  $n > 3$  Spielern durchführen. Dazu setzt man die Auszahlungen im ersten Schritt auf  $(c_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  und wählt  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\pi : \hat{E}_G \rightarrow \mathbb{R}^n$  entsprechend. Für Spieler  $A$  werden so aufgrund der höheren Variablenanzahl  $n + 1$  Strategien benötigt, während die Anzahl der Strategien von Spieler  $B$  und  $C$  weiterhin nur von der Anzahl und Grad der Gleichungen von  $\phi(V)$  abhängen. Die zusätzlichen Spieler benötigen jeweils nur eine einzige Strategie

(bzw. beliebig viele gleichwertige Strategien) zur Festlegung der eigenen Auszahlung für vollständig gemischte Equilibrien, womit das resultierende Spiel aus spieltheoretischer Sicht im Wesentlichen einem Spiel mit 3 Spielern entspricht. Der Beweis scheitert für  $n = 2$  Spieler, da die erwartete Auszahlung einer reinen Strategie eines Spielers nur von einem anderen Spieler abhängig ist und so nie das Produkt zweier Variablen enthält. Damit enthalten auch die Equilibriumsbedingungen kein solches Produkt und es lassen sich keine Polynome mit Grad größer 1 konstruieren.

Insgesamt ist somit eine endliche Darstellung der Präferenzordnung jedes Spielers für alle gemischten Nash-Equilibrien nicht auf triviale Art und Weise umzusetzen. Insbesondere muss die Struktur der Auszahlungen von vollständig gemischten Equilibrien für 3 Spieler nicht über die algebraischen Vereinfachungen allein erschöpft sein. Weitere Betrachtungen der Auszahlungsmengen von 3-Spieler-Spielen könnten an dieser Stelle von Nutzen sein

## 5 Literaturverzeichnis

Datta, R.S.(2003). Universality of Nash-Equilibria. *Mathematics of Operations Research, Volume 28, Number 3, 424-32*

Nash, J.F. (1950). *Non-cooperative games*, Dissertation, Princeton University

Selten, R. (1975). Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International journal of game theory, 4(1),25-55*.

Weibull, J. W. (1997). *Evolutionary game theory*. MIT press.

Zagare, F.C. & Kilgour, D.M. (2004). *Perfect Deterrence*. Cambridge University Press.

## 6 Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere Ich, die vorliegende Diplomarbeit ohne die Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 23.Juni 2014

R.Hesse